Вариант 3

В каждом вопросе требуется отметить только один ответ (из A–E), который вы считаете правильным. Если вы считаете, что среди предложенных вариантов более одного правильного, отметьте любой из них, но только один.

Правила оценивания вопроса:

- правильный ответ — балл, указанный в начале вопроса
- отсутствие ответа или неправильный ответ — 0 баллов

Итоговый балл за экзамен — сумма баллов за каждый вопрос

Максимальная сумма 100 баллов

Длительность экзамена 2 часа (120 минут)

1. 8 баллов

Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[6]{x^4+2}-|x|}$ равен

A 0

B –1

C –2 правильный ответ

D –3

E другому числу

2. 8 баллов

Пусть $f(x)=(x^2-4)e^{-|x|}$. Найдите истинное утверждение:

A функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке x

B число локальных экстремумов функции $f(x)$ четно

C функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения правильный ответ

D график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту

E нет истинных утверждений

3. 8 баллов

Дана функция $f(x,y)=(x-y)^2$ и множество $M=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$. Найдите истинное утверждение:

A точка (0, 1) является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M

B функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке

C функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в двух точках правильный ответ

D наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M меньше $\dfrac{3}{2}$

E нет истинных утверждений

4. 8 баллов

Пусть $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 4x|, & \text{если } x < 0, \\ x^3 - 2x^2 - 4x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

Найдите истинное утверждение:

A функция $f(x)$ не дифференцируема в двух точках

B на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ функция $f(x)$ монотонна

C функция $f(x)$ имеет две точки локального минимума правильный ответ

D наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ больше $-\frac{1}{2}$

E нет истинных утверждений

5. 8 баллов

Интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ равен

A $\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$

B $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$ правильный ответ

C $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$

D $-\frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + C$

E другому семейству функций

6. 8 баллов

Пусть A — симметричная 3×3 матрица, задающая квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ^{T} — операция транспонирования. Какие из утверждений I–III истинные?

I. Определитель матрицы A равен 16.

II. Квадратичная форма положительно определена.

III. Максимальное собственное значение матрицы A равно 4.

A только I

B только II и III

C только I и III

D I, II, III правильный ответ

E нет правильного набора ответов

7. 8 баллов

Общим решением линейного уравнения $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ является

A $C_1e^x \cos 2x + C_2e^x \sin 2x$

B $C_1 + C_2e^x \cos x + C_3e^x \sin x$

C $C_1 + C_2e^x \cos 2x + C_3e^x \sin 2x$ правильный ответ

D $C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$

E другое семейство функций

8. 8 баллов

Дана функция S:

$$S = y^T y - b^T X^T y - y^T X b + b^T X^T X b,$$

где y – вектор размерности $n \times 1$, X – матрица размерности $n \times k$, b – вектор размерности $k \times 1$, ^{T} — операция транспонирования.

Выберите **ЛОЖНОЕ** утверждение:

A производная функции S по вектору b равна $-2X^T y + 2X^T X b$

B $X^T X$ является неотрицательно определенной матрицей

C если ранг матрицы X равен q, то ранг матрицы $X^T X$ равен $q - 1$ правильный ответ

D матрица $P_X = X(X^T X)^{-1} X^T$ является симметричной

E среди утверждений есть ложное

9. 9 баллов

Дана случайная величина X с функцией распределения

$F_X(x) = x^{\frac{1}{\theta}}$ при $0 \le x \le 1$, $F_X(x) = 0$ при $x < 0$, $F_X(x) = 1$ при $x > 1$, $\theta > 0$ — параметр.

По выборке из 100 наблюдений была посчитана сумма $\sum_{i=1}^{100} \ln(x_i) = -25$.

Оценка дисперсии $Var(X)$, полученная с помощью метода максимального правдоподобия, равна

A $\ln(4)$

B $\ln(2)$

C 2

D 2/75 правильный ответ

E другому числу

10. 9 баллов

Количество часов, которое требуется строителю для завершения ремонта, имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, плотность которого задается равенствами $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \ge 0$, $f_X(x) = 0$ при $x < 0$. Медиана распределения равна $10\ln(2)$. Для получения премии от заказчика ему необходимо успеть завершить ремонт за 40 часов. Вероятность того, что строителю удастся получить премию, при условии, что он уже занимается ремонтом на протяжении 10 часов, равна

A e^{-1}

B e^{-2}

C $1 - e^{-3}$ правильный ответ

D $1 - e^{-1}$

E другому числу

11. 9 баллов

Имеется выборка из трех независимых наблюдений X_1, X_2 и X_3 из равномерного распределения на отрезке $[0, b]$. Тестируется гипотеза $H_0: b = 5$ против альтернативы $H_1: b = 10$. Нулевая гипотеза отвергается, если хотя бы одно из наблюдений оказалось больше 4. Уровень значимости соответствующего теста равен

A $\frac{19}{27}$

B $\frac{61}{125}$ правильный ответ

C $\frac{7}{8}$

D $\frac{1}{16}$

E другому числу

12. 9 баллов

Преподаватель оценивает модель зависимости оценки на экзамене по эконометрике (Y, баллы по 10 балльной шкале) от времени, потраченного студентом на чтение учебника (X, часы) и дамми-переменной D, которая принимает значение 1, если студент посетил более 50% семинаров, и 0 иначе.

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 D_i + \beta_3 X_i D_i + \varepsilon_i$$

При оценке модели для 25 студентов магистратуры получены следующие результаты:
$\hat{\alpha} = 4.3$ $\widehat{\beta_1} = 0.012$ $\widehat{\beta_3} = 0.14$ $\widehat{\beta_2} + \widehat{\beta_3} = 1.34$ $\widehat{Var}(\hat{\alpha}) = 0.53$ $\widehat{Var}(\widehat{\beta_1}) = 0.008$ $\widehat{Var}(\widehat{\beta_2}) = 0.008$ $\widehat{Var}(\widehat{\beta_3}) = 0.011$ $RSS = 13.1$ $TSS = 59.6$.

$TSS = \sum_{i=1}^{25}(Y_i - \bar{Y})^2$, $RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ — сумма квадратов остатков.

Какие из утверждений I–IV истинные?

I. Константа регрессии значима на уровне значимости 1%.

II. Математическая формулировка гипотезы о том, что посещение семинаров не помогает увеличить оценку на экзамене $H_0: \beta_3 = 0$

III. Коэффициент детерминации регрессии равен 0.22.

IV. Расчетное значение тестовой статистики для проверки гипотезы о значимости модели в целом составляет 24.8.

A только I

B только I и III

C только I и IV правильный ответ

D только I, II и IV

E нет правильного набора ответов