

Демонстрационный вариант
по направлению 01.04.02 "Прикладная математика и информатика"
ОП "Современные компьютерные науки"

Задача № 1.

Задача о выполнимости линейных уравнений на булевом кубе. Переменные x_1, \dots, x_n принимают значения 1 или -1. Функция от переменных $\text{sum}(x, y, z, \dots)$ (определено для любого конечного числа) вычисляет сумму от переменных. Задан набор условий вида

1. $\text{sum}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k_1}}) \in \{a_{11}, \dots, a_{1l_1}\}$
 2. $\text{sum}(x_{i'_1}, \dots, x_{i'_{k_2}}) \in \{a_{21}, \dots, a_{2l_2}\}$
 - ...
 - m. $\text{sum}(x_{i_1^{(m)}}, \dots, x_{i_{k_m}^{(m)}}) \in \{a_{m1}, \dots, a_{ml_m}\}$
- Тут a_1, \dots, a_m - целые числа.

Будем говорить что система уравнений *совместна*, если найдётся набор переменных x_1, \dots, x_n , удовлетворяющий всем уравнениям (то есть каждая из сумм равна одному из разрешённых значений).

Докажите что данная задача NP-полная (считая сложность от длины входа, или, что тоже самое, от $n + m + \max_i(l_i)$).

Задача № 2.

На плоскости отмечены 2023 красных точки. Будем называть последовательность (не обязательно различных) точек $A_0, A_1, \dots, A_{2023}$ корректной, если

1. $A_0 = (0, 0)$,

2. при $i = 0, 1, \dots, 2022$ середина каждого отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ - красная точка, причем все эти красные точки попарно различны.

Для корректной последовательности точек $A_0, A_1, \dots, A_{2023}$ покрасим точку A_{2023} в синий цвет (точка может быть одновременно красной и синей). Найдите максимально возможное количество синих точек, в зависимости от изначального расположения красных точек.

Задача № 3.

На линейном пространстве размерности 8 над полем \mathbb{C} задан линейный оператор A . Известно, что в одном из базисов для его матрицы A выполнены следующие равенства $\text{rk}(A) = 3$, $\text{tr}(A) = 4$, а сумма попарных произведений различных собственных значений A равна 5. Найдите произведение *ненулевых* собственных чисел, если известно, что характеристический многочлен оператора A принимает значение 31 в точке 1.

Задача № 4.

На плоскости заданы 3 случайные точки, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение (одномерное). Выберем равновероятно одну из медиан получившегося треугольника. Найдите медиану его длины.

Задача № 5.

Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg } x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

Задача № 6.

На трассе Москва–Минск, руководство автовокзал решило изменить график движения автобусов. Тщательный анализ расписания показал, что оптимальным является следующий график движения автобусов вдоль трассы с учетом остановок: сначала автобус идет на протяжении T_1 минут со скоростью V_1 метров в минуту, затем T_2 минут со скоростью V_2 метров в минуту, ..., наконец, T_N минут со скоростью V_N метров в минуту. В течение некоторых интервалов автобус может стоять (скорость равна 0).

По действующей инструкции обеспечения транспортной безопасности движения автобусов расстояние между двух следующих друг за другом автобусов должно быть не менее L метров. Определите минимально допустимый интервал в минутах между отправлениями автобусов, позволяющий им двигаться по этому графику без опасного сближения.

Задача № 7.

Дан массив, состоящий из n целых чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Вы можете менять числа в массиве местами, для обмена чисел на позициях i и j надо заплатить $|i - j|$ денег.

В массиве зафиксирован отрезок с позиции l до позиции r . Ваша цель — поменять числа в массиве так, чтобы минимизировать сумму чисел на отрезке с l по r . При этом на обмены вы можете потратить не более x денег.

Задача № 8.

Ученики древнегреческого философа Платона однажды попросили его дать определение человека, на что тот ответил: «Человек есть животное на двух ногах, лишённое перьев». Однако после того, как Диоген Синопский принёс в Академию ощипанного петуха и предъявил его в качестве платоновского человека, Платону пришлось добавить к своему определению: «И с плоскими ногтями».

Платон и Диоген решили предсказывать, является ли произвольная сущность человеком или нет. Для этого они договорились, что будут рассматривать некоторые признаки этих сущностей, именуемые буквами латинского алфавита с 'A' по 'T'. Философы оставили в секрете, что значат эти признаки, так что эта информация вам недоступна.

Затем философы пошли собирать данные. Платон собрал обучающую выборку и решил протестировать свои гипотезы на тестовой выборке, за которую отвечал Диоген. Но Диоген собрал только значения признаков, совсем забыв про целевую переменную, после чего забрался спать в бочку. Помогите Платону предсказать целевую переменную на данных Диогена.

О датасете

Вам предлагаются три файла, 'train.csv', 'test.csv' и 'example.csv' (<https://disk.yandex.ru/d/k5IWvq-mxGFX3w>):

- Файл 'train.csv' содержит признаки обучающей выборки и колонку с разметкой 'target'. Значение 1 в этой колонке соответствует человеку, а 0 - нечеловеку. - Файл 'test.csv' содержит признаки тестовой выборки. - Файл 'example.csv' содержит пример корректной посылки в контекст.

Таким образом, вам нужно предсказать колонку 'target' для объектов из файла 'test.csv'.

Что нужно сделать?

От вас требуется загрузить в систему файл 'answers.csv' в формате, аналогичном файлу 'example.csv' с предсказаниями для объектов тестовой выборки. В качестве целевой метрики используется ROC-AUC.

Задача № 9.

Найдите собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 13 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 13 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Если известно, что ее определитель равен $2^{19} \cdot 3 \cdot 37$.

В ответе укажите сумму двух наименьших собственных значений.

Задача № 10.

Рассмотрим множество булевых схем \mathcal{C}_n , в правых частях присваиваний (т. е. в элементах) которых разрешены любые монотонные булевы функции от n переменных и отрицание. Верно ли, что при $n > 1$ любая булева функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ может быть вычислена некоторой схемой из \mathcal{C}_n размера $O(n)$?