

Утверждено 01.11.2023 г.

Академическим руководителем программы  
«Современные компьютерные науки»

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА  
ЭКОНОМИКИ»**

**Факультет компьютерных наук**

### **ПРОГРАММА**

**подготовки к экзамену для поступающих на  
образовательную программу магистратуры  
«Современные компьютерные науки»,  
направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика  
по дисциплине «Математика и программирование (письменный экзамен)»**

Академический руководитель программы \_\_\_\_\_ Хузиева А.Э.

Москва, 2023 год

### Предварительные критерии оценивания

**0-2** Абитуриентом предложены идеи решения задачи. Приведено решение без объяснений, выкладок или доказательств.

**3-5** Приведено решение с неверными или недостаточными обоснованиями.

**6-7** Верное решение с существенными ошибками/неточностями в доказательстве. Нет реализации алгоритма, не разобраны все случаи или часть из них не доказана или разобрана с ошибками. Неоптимальное решение.

**8-10** Верное решение с небольшими описками или неточностями

- Апелляция оценок **8-9** не рассматривается.
- Уточненные критерии по каждой из задач публикуются одновременно с началом периода подачи апелляций.
- Если в решении присутствуют ссылки на теоретические факты из программы, то они должны быть оформлены с указанием точных формулировок теорем, которые применяются. Если утверждение, на которое ссылается абитуриент, не содержится в программе вступительных испытаний, то его необходимо доказать в работе.
- Все выкладки должны быть равносильными преобразованиями, каждый случай рассмотрен отдельно.
- Номер задания должен четко выделяться на фоне остального текста.
- Все ответы должны быть перенесены в чистовик. Черновики не проверяются экзаменационной комиссией.

### Перечень и содержание тем для подготовки

#### 1. Алгебра и геометрия, линейная алгебра

1. Группы, кольца, поля. Определения и примеры. Циклические группы. Теорема о гомоморфизме групп и колец. Конечные поля, их реализация как факторколец кольца многочленов.
2. Подстановки. Определение подстановки, четность подстановок. Произведение подстановок, разложение подстановок в произведение транспозиций и независимых циклов.
3. Комплексные числа. Геометрическое изображение, алгебраическая и тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корней, корни из единицы.
4. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.
5. Линейная зависимость и ранг. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, базис и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
6. Определители. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Критерий равенства определителя нулю. Формула разложения определителя матрицы по строке (столбцу).
7. Операции над матрицами. Операции над матрицами и их свойства. Теорема о ранге произведения двух матриц. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная

матрица, ее явный вид (формула), способ вычисления с помощью элементарных преобразований строк.

8. Векторные пространства; базис. Векторное пространство, его базис и размерность. Преобразования координат в векторном пространстве, матрица перехода (замены координат). Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений. Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств. Линейная независимость подпространств. Базис и размерность прямой суммы подпространств.
9. Линейные отображения и линейные операторы. Линейные отображения, их запись в координатах. Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями. Сопряженное пространство и сопряженные базисы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
10. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической билинейной функции. Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции. Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Закон инерции. Положительно определенные матрицы и квадратичные функции. Критерий Сильвестра.
11. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные базисы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Ортогональные операторы.
12. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический и минимальный многочлены матрицы, теорема Гамильтона–Кэли. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственные подпространства линейного оператора, их линейная независимость. Условие диагоналируемости оператора. Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, свойства его собственных значений и собственных векторов. Жорданова нормальная форма комплексной матрицы. Поиск жорданова базиса. Сингулярное разложение матрицы (SVD разложение).

## 2. Математический анализ

1. Пределы по Коши и Гейне, непрерывность. Пределы последовательностей и функций. Непрерывные функции.
2. Элементы общей топологии. Непрерывные отображения. Компактность, связность, хаусдорфовость.
3. Ряды. Числовые и функциональные ряды. Признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный, Лейбница). Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
4. Дифференцирование. Дифференцирование функций от одной переменной. Применение производной для нахождения экстремумов функций. Формула Тейлора.
5. Функции многих переменных. Частные производные. Градиент и его геометрический смысл. Метод градиентного спуска. Поиск экстремумов функций от многих переменных. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа.
6. Интегрирование. Определенный и неопределенный интегралы. Основные методы интегрирования функций. Первообразные различных элементарных функций.
7. Кратные интегралы (двойные, тройные), формула замена координат в кратном интеграле, связь с повторными интегралами.

### 3. Комбинаторика

1. Основные правила комбинаторики: правила суммы и произведения. Основные комбинаторные объекты: сочетания и размещения с повторениями и без повторений. Формулы для количества сочетаний и размещений. Принцип Дирихле.
2. Множества. Круги Эйлера, операции на множествах. Формула включений и исключений.
3. Сочетания. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями.
4. Графы: неориентированные, ориентированные, простые графы. Изоморфизм графов. Некоторые стандартные классы графов: полные, двудольные, цепи, циклы, деревья. Критерий двудольности графа.
5. Деревья. Связь между количеством вершин и рёбер. Эквивалентные определения класса деревьев. Формула Кэли для числа деревьев на фиксированном множестве вершин.
6. Кликовое число, число независимости, хроматическое число графа; связь между этими числами. Жадный алгоритм раскраски графа. Числа Рамсея.
7. Паросочетания и вершинные покрытия в графе. Теоремы Холла и Кёнига о паросочетаниях в двудольных графах.

### 4. Теория вероятностей и математическая статистика

1. Основные понятия теории вероятностей. Определение вероятностного пространства, простейшие дискретные случаи (выборки с порядком и без него, упорядоченные и неупорядоченные), классическая вероятностная модель. Случайная величина, функция распределения.
2. Условные вероятности. Определение условной вероятности, формула полной вероятности, формула Байеса.
3. Математическое ожидание, дисперсия, корреляция. Определение математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции, их свойства.
4. Независимость событий. Парная независимость и независимость в совокупности.
5. Сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Взаимосвязь сходимостей.
6. Характеристические функции случайных величин. Связь характеристических функций и моментов распределения.
7. Основные теоремы теории вероятностей. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Усиленный закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
8. Распределения. Стандартные дискретные и непрерывные распределения, их математические ожидания, дисперсии и свойства: биномиальное, равномерное, нормальное, пуассоновское, показательное, геометрическое.
9. Гауссовские вектора.
10. Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции).
11. Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.
12. Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия и проверка значимости.

## 5. Алгоритмы

1. Анализ алгоритмов. Понятие о сложности по времени и по памяти.
2. Строки и операции над ними. Представление строк. Вычисление длины, конкатенация. Алгоритмы поиска подстроки в строке.
3. Сортировки. Нижняя теоретико-информационная оценка сложности задачи сортировки. Алгоритмы сортировки вставками, пузырьком, быстрая сортировка, сортировка слиянием. Оценка сложности.
4. Представление матриц и векторов. Алгоритмы умножения матриц и эффективные способы их реализации. Численные методы решения систем линейных уравнений.
5. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы для решения систем дифференциальных уравнений.
6. Граф. Ориентированный граф. Представления графа. Обход графа в глубину и в ширину. Топологическая сортировка. Подсчет числа путей в орграфе.
7. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Форда–Беллмана. Алгоритм Флойда. Алгоритм A\*.

## 6. Основы теории сложности вычислений

1. Булевы функции, основные логические связки. Задание булевых функций таблицами истинности. Правила алгебры логики. Дизъюнктивная и совершенная дизъюнктивная нормальная формы, конъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальная формы булевой функции. Полиномы Жегалкина, теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина.
2. Булевы схемы с элементами «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание»; сложность и глубина схемы, задание схемы в виде ациклического ориентированного графа. Вычисление произвольной булевой функции от  $n$  переменных схемой размера  $O(n \cdot 2^n)$ . Задачи выполнимости булевой схемы, КНФ и 3-КНФ. Эффективное сведение этих задач друг к другу.
3. Машина Тьюринга. Временная сложность, классы P и NP.
4. NP-трудные и NP-полные задачи. Теорема Кука-Левина. NP-полнота некоторых классических задач: задача коммивояжера, задача о поиске гамильтонова цикла в графе, задача о поиске вершинного покрытия графа, задача о 3-раскрашиваемости графа и др.

## 7. Основы машинного обучения

1. Линейная регрессия, функции потерь в регрессии.
2. Обобщающая способность, градиентные методы обучения.
3. Регуляризация, линейная классификация.
4. Метрики качества классификации, логистическая регрессия.
5. Многоклассовая классификация, решающие деревья.
6. Бэггинг, случайные леса.
7. Метод опорных векторов.
8. Градиентный бустинг.

## Список рекомендуемой литературы

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры, 1999, 2001, Факториал, 2013,2017,2018, МЦНМО.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, 1977, Наука.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I, II, 2000, Физматлит.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 1975, Наука.
5. Сборник задач по алгебре под редакцией Кострикина А.И, И. В. Аржанцев, В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин и др. — МЦНМО Москва, 2009.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по мат. анализу. Изд-во Университет, 1999.
7. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: Наука, 1981. 544 с. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.
8. Демидович, Б. П, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд-во Аст, 2007
9. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969 и более свежие издания
10. М. Холл. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
11. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей, УРСС. М.: 2001;
12. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, 1970;
13. Ширяев, А. Н. Вероятность, Наука. М.: 1989;
14. Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, Ч М.: Наука, 1982;
15. Севастьянов, Б. А., Чистяков, В. П, Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей, М.: Наука, 1986.
16. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных. Изд-во Невский диалект, 2005;
17. Керниган Б., Ритчи Д. Язык программирования С. Изд-во Вильямс, 2008;
18. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. - М.: Издательский дом Вильямс, 2005
19. М.Вялый, В.Подольский, А.Рубцов, Д.Шварц, А.Шень. Лекции по дискретной математике. Изд. Дом ВШЭ, 2021. 495 с.
20. Michael Sipser. Introduction to the Theory of Computation
21. Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
22. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.