

Демонстрационный вариант

В большинстве задач ответом является число. Если число не целое, запишите его в виде десятичной дроби, округлив её до **двух** знаков после точки. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте **точку**.

Если формат ответа в задаче иной, в условии даются инструкции по вводу ответа. Будьте внимательны!

Задача 1. Найдите значение предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n+1) + 2^{\sin 3n}}{n^2}.$$

Задача 2. Вычислите определённый интеграл:

$$\int_{\frac{1-e^6}{3}}^0 \frac{dx}{1-3x}.$$

Задача 3. Найдите собственный вектор матрицы A , соответствующий её наименьшему собственному значению, такой, что его первая координата равна 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -14 & 7 \end{pmatrix}.$$

В ответ запишите компоненты вектора через запятую, без скобок и других символов. Например, если у Вас получился вектор $(1, -5, 6)$, в ответ нужно записать «1, -5, 6» (без кавычек).

Задача 4. Вектор x в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $(4, 2, 3)$. Найдите координаты вектора x в базисе g_1, g_2, g_3 , где

$$g_1 = 5e_1 + e_2 + e_3,$$

$$g_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

В ответ запишите компоненты вектора через запятую, без скобок и других символов. Например, если у Вас получился вектор $(1, -5, 6)$, в ответ нужно записать «1, -5, 6» (без кавычек).

Задача 5. Трое людей в чёрном, четверо людей в синем и пятеро людей в жёлтом пришли обедать в секретную столовую. Сколькими способами они могут встать в очередь так, чтобы и первым, и последним был человек в жёлтом? (Мы отождествляем очереди с одинаковым порядком цветов).

Задача 6. На вступление в Братство Кольца претендует некоторое количество хоббитов. Анкетирование показало, что 30 из них умеют стрелять из лука, 25 умеют лазать по деревьям, а 31 — печь пироги. При этом 19 хоббитов умеют и стрелять из лука, и лазать по деревьям, 17 — и стрелять из лука, и печь пироги, а 18 — и лазать по деревьям, и печь пироги. Известно также, что 14 хоббитов умеют и то, и другое, и третье. Каково наименьшее возможное число претендентов?

Задача 7. Каждую осень слонопотамы собираются в стаю и отправляются в тёплые края. Вожаком стаи выбирается случайным образом среди всех слонопотамов из двух племён: западного и восточного. Каждый слонопотам либо отважен, либо благоразумен. В западном племени четыре отважных слонопотама и шесть благоразумных. В восточном племени восемь отважных и двое благоразумных.

Известно, что вожаком стаи в 2020 году выбран благоразумный слонопотам. Найдите вероятность того, что это представитель восточного племени.

Задача 8. Двадцать человек уселись в круг и играют в следующую игру. Каждый из них подбрасывает честную монетку. Победителями объявляются те, у кого результат подбрасывания отличается и от результата соседа слева, и от результата соседа справа. Найдите математическое ожидание числа победителей в этой игре.

Задача 9. Перед Вами три программы. Определите, какая из них является корректной реализацией алгоритма бинарного поиска. Считайте, что:

1. Команда $x \leftarrow expr$ записывает в переменную x значение выражения $expr$.

2. Элементы массива нумеруются с 1.

1. **Input:** sorted array A , size of array n , number to be searched x

$lowerBound \leftarrow 1$

$upperBound \leftarrow n$

while 1 = 1 **do**

if $upperBound < lowerBound$ **then**

Output: x does not exist in A

exit

end if

$midPoint \leftarrow lowerBound + (upperBound - lowerBound)/2$

if $A[midPoint] < x$ **then**

$lowerBound \leftarrow midPoint + 1$

end if

if $A[midPoint] > x$ **then**

$upperBound \leftarrow midPoint - 1$

end if

if $A[midPoint] = x$ **then**

Output: x found at position $midPoint$ in A

exit

end if

end while

2. **Input:** sorted array A , size of array n , number to be searched x

$lowerBound \leftarrow 1$

```

upperBound ← n
while 1 = 1 do
  if upperBound < lowerBound then
    Output: x does not exists in A
    exit
  end if
  midPoint ← lowerBound + (upperBound – lowerBound)/2
  if A[midPoint] < x then
    upperBound ← midPoint – 1
  end if
  if A[midPoint] > x then
    lowerBound ← midPoint + 1
  end if
  if A[midPoint] = x then
    Output: x found at position midPoint in A
    exit
  end if
end while

```

3. **Input:** sorted array A , size of array n , number to be searched x
- ```

for $i := 1$ to n do
 if $x = A[i]$ then
 Output: x found at position i in A
 end if
end for
Output: x does not exists in A

```

**Задача 10.** Что выведет следующая программа? Считайте, что:

- Команда  $x \leftarrow expr$  записывает в переменную  $x$  значение выражения  $expr$ .
- Команда  $stack \leftarrow CreateStack()$  записывает в переменную  $stack$  пустой стек. После этого можно использовать операции:
  - $stack.push(x)$ , которая добавляет элемент  $x$  на вершину стека,
  - $stack.pop()$ , которая удаляет элемент с вершины стека,
  - $x \leftarrow stack.top()$ , которая записывает в переменную  $x$  элемент, в данный момент находящийся на вершине стека.
- Команда  $n \leftarrow \text{length of } string$  записывает в переменную  $n$  длину строки  $string$ .
- Элементы строки нумеруются с 1.
- Символы '0', '1', ..., '9' представляются последовательными целыми числами.

```

stack ← CreateStack()
string ← "73 – 57 + *91 + *35 + 61 + *12 – * + 23 + –1 + 1 + "
n ← length of string

```

```
for $i := 1$ to n do
 $c \leftarrow \text{string}[i]$
 if $c \geq '0'$ and $c \leq '9'$ then
 $\text{stack.push}(c - '0')$
 else
 $\text{arg2} \leftarrow \text{stack.top}()$
 $\text{stack.pop}()$
 $\text{arg1} \leftarrow \text{stack.top}()$
 $\text{stack.pop}()$
 if $c = '+'$ then
 $\text{stack.push}(\text{arg1} + \text{arg2})$
 else if $c = '-'$ then
 $\text{stack.push}(\text{arg1} - \text{arg2})$
 else
 $\text{stack.push}(\text{arg1} * \text{arg2})$
 end if
 end if
end for
 $\text{answer} \leftarrow \text{stack.top}()$
```