УТВЕРЖДЕНО
протокол № м-21/9 от 14.09.2021 г.
заседания Академического совета
образовательной программы
«Математика» (магистратура)

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Математики

ПРОГРАММА
подготовки к экзамену для поступающих на образовательные программы магистратуры
«Mathematics»
и
«Математика и математическая физика»

по дисциплине
«Математика»

Академический руководитель программы

проф. ф-та математики А. Л. Городенцев

Москва, 2021 год

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИСЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ПОРЯДОК ПОСТУПЛЕНИЯ, ПРОГРАММА И ДЕМО-ВЕРСИЯ ЭКЗАМЕНА ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА МАГИСТЕРСКИЕ ПРОГРАММЫ «MATHEMATICS» И «МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

СОДЕРЖАНИЕ

Порядок проведения вступительных испытаний

Две программы и два профиля обучения

На факультете математики имеется две магистерских образовательных программы:

- англоязычная программа «Mathematics»
- русскоязычная программа «Математика и математическая физика».

Различие между ними заключается *только* в их языковом статусе. Официальным языком обучения на программе «Mathematics» является английский[1], а на программе «Математика и математическая физика» — русский.

Каждый студент магистратуры, вне зависимости от того, на какой из двух программ он учится, отдельно выбирает для себя *профиль обучения*. Таковых имеется два:

- математика
- математическая физика.

Формально они различаются весьма небольшим набором обязательных курсов и семинаров, неформально — тем, чему: математике или матфизике будет уделено основное внимание в ходе учёбы и научной работы. Выбор профиля обучения осуществляется студентами сразу после зачисления и *ничем не ограничен*: независимо от того, на какую из программ, «Mathematics» или «Математика и математическая физика», студент зачислен и независимо от своих результатов на вступительном экзамене каждый студент может (и должен) выбрать себе *любой* из двух профилей обучения. Именно от этого выбора, а не от того, на какой программе Вы учитесь, будут зависеть содержательные математическая и физическая составляющие Вашего образования.

Вне зависимости от выбранной программы и профиля, студент составляет индивидуальный учебный план, свободно выбирая (по согласованию с научным руководителем) курсы из числа читаемых на факультете. Например, выбрав трек Математика, можно уделить внимание и курсам по физике, а можно, наоборот, ограничиться чисто математическими предметами. Единственное важное ограничение — на англоязычной программе нельзя выбирать русскоязычные курсы[2]. Это несколько ограничивает ассортимент курсов на англоязычной программе.

[1] Одно из последствий англоязычности заключается в том, что выпускникам программы «Mathematics» при поступлении во многие англоязычные аспирантуры *не требуется* подтверждать уровень своего английского отдельным языковым сертификатом — диплом об окончании англоязычной программы частенько его заменяет.

Другое последствие англоязычности — необходимость слушать и сдавать курсы, писать и защищать диплом на английском языке; это требует серьезной подготовки.

[2] Точнее, можно, но не более 20%, и в этом случае английский не будет указан в дипломе как единственный язык освоения программы.

Общий конкурс

Зачисление на обе магистерские программы «Mathematics» и «Математика и математическая физика» происходит по единому и *общему для двух программ* конкурсу, который проводится на основании результатов одного, общего для двух программ письменного вступительного экзамена по математике. Участники конкурса упорядочиваются по убыванию полученного на экзамене результата, и все абитуриенты, чей результат оказывается в пределах официально установленных проходных баллов для обучения на бюджетных или платных местах, считаются успешно прошедшими единый конкурс.

Распределение успешно прошедших единый конкурс студентов между образовательными программами «Mathematics» и «Математика и математическая физика» осуществляется по желанию студентов на основании результатов внутреннего тестирования по английскому языку. Тестирование проводится после объявления результатов единого конкурса и *не является обязательным*. К тестированию допускаются все успешно прошедшие единый конкурс, вне зависимости от того по какому из двух профилей «математика» или «математическая физика» они в дальнейшем собираются обучаться. Участие в тестировании и его результаты не влияют на возможность дальнейшего выбора профиля. Они существенны только для студентов, желающих обучаться на англоязычной программе «Mathematics»: для зачисления на англоязычную программу *необходимо* пройти тестирование по английскому и показать на нём результат не ниже официально установленного[1].

После объявления результатов тестирования те, кто успешно прошёл тестирование и пожелал обучаться на программе «Mathematics», зачисляются на эту программу, а все остальные студенты, успешно прошедшие вступительный конкурс, зачисляются на программу «Математика и математическая физика».

Вступительный экзамен по математике

Вступительный экзамен состоит в письменном решении задач, условно разбитых на три группы: базовая математическая часть, состоящая из четырёх задач, и две специальные части по две задачи: одна посвящена началам математической физики, а другая — дальнейшим разделам математики. Количество баллов, даваемое за полное решение задачи, указывается в её условии. Один ответ, приведённый без обоснования, оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет.

Итоговая оценка равна $\mathbf{min(100,} \boldsymbol{S})$, где S сумма баллов полученных за задачи. Таким образом, максимальное число баллов, которое можно набрать на экзамене, равно 100, а для его получения *не требуется* решить все задачи.

[1] Содержание тестирования и критерии оценивания: https://math.hse.ru/english_test

Требования к поступающим

Экзамен может содержать (и, как правило, содержит) задачи, относящиеся к следующим разделам математики.

Общая часть

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки, мультиномиальные коэффициенты, производящие функции) и основы теории вероятностей (независимость событий и случайных величин, условные вероятности, математическое ожидание, дисперсия, распределение и плотность случайной величины).

- Элементарная алгебра: поле комплексных чисел, формальные степенные ряды и многочлены, выражение симметрических функций от корней многочлена через его коэффициенты, а коэффициентов — через корни, полиномиальная интерполяция, кратные корни, алгоритм Евклида для многочленов, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, экспонента и логарифм, симметрическая группа, знак и цикловой тип перестановки.

- Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственное пространство, решение систем линейных уравнений, определители, характеристический и минимальный многочлены матрицы, тождество Гамильтона – Кэли, собственные числа и собственные векторы, жорданова нормальная форма комплексной матрицы, вычисление аналитических функций от матриц и операторов, билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, индекс вещественной квадратичной формы.

- Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^n$: расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса, кривые второго порядка на евклидовой плоскости.

- Одномерный и многомерный вещественный анализ: пределы последовательностей и функций, числовые и функциональные ряды, ряд Тейлора, непрерывность и дифференцируемость функций и отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, производные сложных и неявных функций, отыскание условных и безусловных экстремумов, первообразная и интеграл, сведение многомерных интегралов к повторным одномерным, несобственные интегралы, вычисление длины кривой и площади поверхности с помощью интегрирования. Открытые, замкнутые и компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, их касательные пространства.

- Основы комплексного анализа: основная теорема алгебры, комплексная производная функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, голоморфные и мероморфные функции, интеграл Коши, ряды Лорана и радиус сходимости, теорема о вычетах, вычисление интегралов (включая неопределённые и несобственные) при помощи вычетов, многозначные функции, аналитическое продолжение вдоль пути.

- Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения, элементарные приёмы интегрирования (разделение переменных, однородные уравнения, линейные уравнения первого порядка, уравнения в дифференциалах, интегрирующий множитель), системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, определитель Вронского, уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД, 2000.

В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис, 1999.

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М: Наука, 1973.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, 2004.

В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, Том 1*, М.: Мир, 1967

Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

Также см. список литературы и задач к программе итогового экзамена бакалавриата Факультета математики: https://www.hse.ru/ba/math/final_exam

Специальная часть «Математика»

- Элементы коммутативной алгебры: коммутативные кольца и их гомоморфизмы, идеалы и фактор кольца, кольца вычетов и китайская теорема об остатках, факториальность кольца многочленов от многих переменных, классификация конечно порождённых абелевых групп, поля и гомоморфизмы полей, характеристика, описание и примеры конечных полей.
- Элементы геометрии: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, взаимное расположение проективных и аффинных подпространств, выпуклые фигуры в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка, аффинные и проективные кривые и поверхности второго порядка (квадрики и коники).
- Элементы некоммутативной алгебры: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы, прямое произведение групп, группы симметрий геометрических фигур, ассоциативные кольца и алгебры, матричные группы Ли GL_n, SL_n, SO_n, SU_n и их алгебры Ли, представления групп.
- Элементы топологии: метрические и топологические пространства, всюду плотные и нигде не плотные множества, компактность, связность, внутренность, замыкание, непрерывные отображения и гомеоморфизмы, гомотопии и гомотопическая эквивалентность, фундаментальная группа.
- Элементы функционального анализа: равномерная непрерывность и равномерная сходимость непрерывных функций, примеры бесконечномерных нормированных и гильбертовых векторных пространств (включая пространства непрерывных, суммируемых и суммируемых с квадратом функций).

Рекомендуемые учебники

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ, 2007.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*, http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

Дополнительная литература: https://math.hse.ru/books

Специальная часть «Математическая физика»

- Основы классической механики: законы Ньютона, потенциальные силы, работа силы вдоль траектории, законы сохранения, лагранжиан и уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) для механической системы в поле потенциальных сил.
- Классическая электродинамика в вакууме: закон Кулона, поле и потенциал, поля и энергия взаимодействия простейших конфигураций зарядов (сферы, плоскости, точечные заряды). Движение заряженной частицы в однородном магнитном и электрическом поле, сила Лоренца.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М: Наука, 1979.

Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М., Наука, 1974.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М: Физматлит, 2004.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М: Физматлит, 2004.

Демонстрационный вариант экзаменационного задания

На выполнение задания отводится 210 минут. Во время экзамена разрешается пользоваться только ручкой и бумагой. Использование иных носителей информации, в том числе любых электронных устройств или шпаргалок, строго запрещено, равно как и всякое общение с кем-либо кроме экзаменаторов. Нарушение этих правил является поводом для отстранения от вступительных испытаний. На экзамене разрешается иметь при себе питьевую воду и шоколад (или их аналоги).
Количество баллов, даваемое за полное решение задачи, указывается в её условии. Один ответ, приведённый без обоснования, оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Итоговая оценка равна $\mathbf{min(100, S)}$, где S это сумма баллов за все задачи.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

ЗАДАЧА 1 (21 БАЛЛ). Пусть числа $p, q \in \mathbb{C}$ таковы, что многочлен $f = x^3 + px + q$ имеет три различных корня. Существует ли многочлен второй степени, значение которого в каждом из корней многочлена f равно произведению двух других корней многочлена f? Если да, явно вычислите его коэффициенты. Если нет, объясните почему.

ЗАДАЧА 2. Существует ли такая комплексная 3×3 матрица X, что матрица e^X равна

А) [14 баллов] $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$? Б) [7 баллов] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

ЗАДАЧА 3 (21 БАЛЛ). Игральный кубик бросают до тех пор, пока одно и то же число очков не выпадет два раза подряд. Найдите математическое ожидание количества сделанных бросков.

ЗАДАЧА 4 (21 БАЛЛ). На координатной плоскости вправо по оси абсцисс с единичной скоростью бежит суслик, а по узкой реке в форме графика функции $y = 1 / (x + 1)$ плывёт акула, всё время держащаяся в самой близкой к суслику точке реки. Какова абсолютная величина скорости акулы в тот момент, когда она пересекает ось ординат?

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ «МАТЕМАТИКА»

ЗАДАЧА 5. Являются ли двумерная сфера с тремя различными выколотыми точками и двумерный тор с одной выколотой точкой

А) [14 баллов] гомеоморфными?

Б) [14 баллов] гомотопически эквивалентными?

ЗАДАЧА 6. Допускает ли симметрическая группа S_4

А) [14 баллов] нетривиальный гомоморфизм в группу нечётного порядка?

Б) [14 баллов] вложение в группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Если да, постройте явный пример. Если нет, объясните почему.

ЗАДАЧА 7. Точечная частица массы m скользит по поверхности, заданной соотношением:

$$z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

где x, y и z — декартовы прямоугольные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Частица соединена с началом координат невесомой пружиной, потенциальная энергия деформации которой задается формулой:

$$U(l) = \frac{kl^2}{2},$$

где l — длина пружины, k — коэффициент ее упругости.

а) [14 баллов] Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

б) [8 баллов] Приведите формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).

в) [6 баллов] Докажите, что уравнения движения допускают стационарные решения, отвечающие постоянному значению z и найдите ограничение на параметры движения, обеспечивающее существование стационарного решения.

ЗАДАЧА 8 (28 БАЛЛОВ). Жесткая непроводящая полусфера массы M и радиуса R может свободно перемещаться в пространстве. Полусфера несет заряд Q, равномерно распределенный по ее поверхности. В центре полусферы (в центре ее большого круга) расположен точечный заряд $-Q$, массы m. Какую минимальную скорость необходимо сообщить точечному заряду вдоль оси симметрии полусферы в противоположном от нее направлении, чтобы заряд мог удалиться от центра полусферы на расстояние R? Всеми силами, кроме электростатических можно пренебречь.

Решения задач демонстрационного варианта

Решение задачи 1 общей части

Ответ: такой многочлен заведомо существует. Чтобы написать его, обозначим корни данного многочлена $x^3 + px + q$ через α_1, α_2, α_3. По формулам Виета,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = p \tag{2}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q\,. \tag{3}$$

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа, квадратный трёхчлен, принимающий при $x = \alpha_1$, α_2, α_3 заданные значения $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$, равен

$$\alpha_2\alpha_3\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_3\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_2\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\,.$$

Приводя все дроби к общему знаменателю $\Delta = (\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)$ и пользуясь тем, что в силу соотношения (1) при всех $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$

$$(x-\alpha_i)(x-\alpha_j) = x^2 + \alpha_k x + \alpha_i\alpha_j\,,$$

перепишем три слагаемых предыдущей суммы как

$$\begin{aligned}
&+\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\Delta}(x^2+\alpha_1 x+\alpha_2\alpha_3)\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_2 x+\alpha_1\alpha_3)\\
&+\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_3 x+\alpha_1\alpha_2)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент при x^2 у искомого квадратного трёхчлена равен

$$\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = 1$$

(числитель, будучи кососимметричным[1] многочленом от α_1, α_2, α_3, делится на произведение их разностей, частное имеет степень нуль, т. е. является константой, и равно 1, так как лексикографически старшие мономы числителя и знаменателя оба равны $-\alpha_1^2\alpha_2$). Коэффициент при x, с учётом соотношения (3), равен

$$-\frac{q}{\Delta}\big((\alpha_2-\alpha_1)-(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_2-\alpha_1)\big) = 0\,.$$

Наконец, свободный член равен

$$\frac{\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = p$$

[1] То есть зануляющимся и при $\alpha_3 = \alpha_2$, и при $\alpha_3 = \alpha_1$, и при $\alpha_2 = \alpha_1$.

(частное — однородный симметрический многочлен степени 2 со старшим мономом $\alpha_1\alpha_2$ — это левая часть (2)). Итак, искомый многочлен равен $x^2 + p$.

В принципе, до этого ответа вполне возможно догадаться путём некоторого количества удачно сложившихся проб ☺, после чего проверить его явным вычислением. Другой способ — решить систему из трёх линейных уравнений

$$a\alpha_i^2\alpha_j^2 + b\alpha_i\alpha_j + c = \alpha_k^3 + p\alpha_k + q$$

на коэффициенты a, b, c искомого квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, исключая неизвестные из системы при помощи соотношений (1)–(3).

Решение задачи 2 общей части

Ответы: в (а) — да, в (б) — нет. Объяснение к (б): поскольку $e^X e^{-X} = E$, все матрицы вида e^X обратимы, а матрица в (б) имеет нулевой определитель.

Напротив, матрица в (а) имеет характеристический многочлен

$$t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1)$$

с двукратным корнем $t = -1$ и простым корнем $t = 1$. Комплексная аналитическая функция $\ln t$ имеет ветвь, определённую в окрестностях обеих точек $t = \pm 1$ и принимающую в этих точках значения $\ln 1 = 0$ и $\ln(-1) = \pi i$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Поэтому определён

$$\ln\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}^2 + b\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где константы a, b, c таковы, что квадратный трёхчлен $p(t) = at^2 + bt + c$ имеет в точках $t = 1$ и $t = -1$ те же разложения Тейлора вплоть до, соответственно, нулевого и первого порядков включительно, что и выбранная нами ветвь логарифма, т. е.

$$p(1) = \ln(1) = 0\,, \quad p(-1) = \ln(-1) = \pi i\,, \quad p'(-1) = \ln'(-1) = -1\,.$$

Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты a, b, c:

$$a+b+c=0\,, \quad a-b+c=\pi i\,, \quad -2a+b=-1\,,$$

решая которую[1], получаем $a = (2-\pi i)/4$, $b = -\pi i/2$, $c = (-2+3\pi i)/4$ и

$$X = \ln\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{2-\pi i}{4}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2\pi i}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} + \frac{-2+3\pi i}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\pi i & -2 & -1 \\ -\pi i & 2\pi i & \pi i \\ 1+2\pi i & -2-2\pi i & -1-\pi i \end{pmatrix}.$$

[1] Например, по правилу Крамера.

Решение задачи 3 общей части

Ответ: 7. Обозначим через F_n событие, состоящее в том, что при n-м броске впервые выпадает то же число очков, что и при предыдущем броске, через p — вероятность выпадания при очередном броске именно того числа очков, что выпало при предыдущем броске, а через $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события. Тогда

$$p = 1/6\,, \quad q = 5/6\,, \quad \mathbb{P}(F_n) = q^{n-2}p$$

(на 2-м, 3-м, … , $(n-1)$-м бросках выпадает не то, что на предыдущем броске, а на n-м броске — то же, что и на $(n-1)$-м). Искомое математическое ожидание равно

$$\sum_{n\geqslant 2} n \cdot \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n\geqslant 2} nq^{n-2}p = \frac{p}{q}\sum_{n\geqslant 2} nq^{n-1} = \frac{p}{q}\Big(-1 + \frac{d}{dq}(1-q)^{-1}\Big) =$$
$$= \frac{p}{q}\left(-1 + (1-q)^{-2}\right) = \frac{p}{1-p}\left(p^{-2} - 1\right) = p^{-1} + 1 = 7\,.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что функция $(1-z)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ аналитична в круге $|z| < 1$, и её производная $(1-z)^{-2} = \frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = \sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$.

Решение задачи 4 общей части

Ответ: $\sqrt{2}/4$. Пусть в момент времени t суслик находится в точке $s = s(t) = (t, 0)$, а акула — в точке $a = a(t) = (x(t), y(t))$, где $y = (1+x)^{-1}$. Вектор скорости акулы равен

$$v(t) = \left(x'_t, y'_t\right) = \left(x'_t, y'_x \cdot x'_t\right) = \left(1, -(1+x)^{-2}\right) \cdot x'_t\,. \tag{4}$$

Поскольку a является ближайшей к s точкой графика, вектор

$$\overrightarrow{sa} = \left(x - t, (1+x)^{-1}\right)$$

перпендикулярен вектору $\left(1, -(1+x)^{-2}\right)$, направленному вдоль проходящей через точку a касательной к графику функции $y = (1+x)^{-1}$. Поэтому скалярное произведение этих векторов $x - t - (1+x)^{-3} = 0$, откуда $t = x - (1+x)^{-3}$. По формуле для производной обратной функции $x'_t = 1/t'_x = \left(1 + 3(1+x)^{-4}\right)^{-1}$. Подставляя это в (4) и полагая $x = 0$, получаем $v(t)\,\big|_{x=0} = (1, -1)/4$.

Решение задачи 5 части «Математика»

Ответы: в (а) — нет, в (б) — да. По теореме Жордана, петля $C \subset \mathbb{R}^2$, являющаяся образом непрерывного вложения $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость, всегда разбивает плоскость на компоненты в том смысле, что пространство $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ не является линейно связным. Очевидно, что теорема Жордана остаётся верной и после удаления из $\mathbb{R}^2$ любого конечного множества точек. Поскольку сфера без точки гомеоморфна[1] $\mathbb{R}^2$, теорема Жордана остаётся верной при замене $\mathbb{R}^2$ на сферу с тремя выколотыми точками. Если бы последняя была гомеоморфна тору с выколотой точкой, то теорема

[1]Например, при помощи стереографической проекции из выколотой точки.

Жордана была бы верна и для тора. Но это не так: на торе есть петли[1], при удалении которых получается пространство, гомеоморфное цилиндру, а он линейно связен. Это доказывает (а).

Что касается (б), то оба пространства гомотопически эквивалентны букету из двух окружностей. В самом деле, тор с выколотой точкой получается из квадрата с выколотой внутренней точкой отождествлением каждой из двух пар противоположных сторон в один отрезок с сохранением ориентации. Квадрат с выколотой внутренней точкой стягивается на свой внешний контур □ так, что все точки контура остаются на месте в процессе гомотопии. В результате последующей склейки противоположных рёбер этого контура получится пара окружностей с одной общей точкой, в которую перейдут все четыре вершины квадрата. Сфера с тремя выколотыми точками стягивается на диск с двумя выколотыми внутренними точками, который в свою очередь стягивается на граф θ, а этот граф — на букет двух окружностей (стягиванием горизонтальной перемычки в точку).

Решение задачи 6 части «Математика»

Ответ в обоих случаях — нет. Так как $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, нетривиальный гомоморфизм из S_4 в группу нечётного порядка должен иметь ядром нормальную подгруппу порядка 8, но нетривиальные нормальные подгруппы в S_4 исчерпываются[2] знакопеременной подгруппой порядка 12 и подгруппой Клейна, имеющей порядок 4.

Вложение $S_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ задавало бы двумерное эффективное[3] линейное представление группы S_4. Такое представление либо неприводимо, либо является прямой суммой двух одномерных. Но двумерное неприводимое представление S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ и имеет ядром группу Клейна, а оба одномерных представления содержат в ядре знакопеременную подгруппу $A_4 \subset S_4$. Таким образом, любое двумерное линейное представление S_4 обязано иметь нетривиальное ядро.

Решение задачи 7 части «Математическая физика»

Решение. Учитывая осевую симметрию поверхности, задачу удобно решать в цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z) пространства $\mathbb{R}^3$:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

В этих координатах уравнение поверхности принимает вид:

$$z = e^{-\rho^2/2}.$$

а) – б) Лагранжиан системы равен разности кинетической и потенциальной энергии частицы на поверхности: $L = T - U$. Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2 e^{-\rho^2}) + \rho^2\dot{\phi}^2\right),$$

[1]Например, экватор или меридиан.

[2]Один из (многих) способов в этом убедиться таков: каждая нормальная подгруппа является объединением классов сопряжённости, коих в S_4 имеется пять: тождественная перестановка, 3 пары независимых транспозиций, 8 циклов длины 3 и по 6 циклов длины 4 и длины 2, так что число элементов в нормальной подгруппе может быть равно только $1 + 3\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4$, где каждый ε_i равен 0 или 1, и вдобавок должно делить 24.

[3]То есть с тривиальным ядром.

где точка означает дифференцирование по времени и, кроме того, z-компонента скорости выражена через ρ и $\dot{\rho}$ в силу уравнения поверхности:

$$\dot{z} = -e^{-\rho^2/2}\rho\dot{\rho}.$$

Длина пружины связана с координатами точки на поверхности теоремой Пифагора:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + e^{-\rho^2}.$$

Таким образом, для Лагранжиана системы получаем выражение:

$$L(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2 e^{-\rho^2}) + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{k}{2}(\rho^2 + e^{-\rho^2}).$$

Система имеет две степени свободы, поэтому система уравнений Эйлера-Лагранжа состоит из 2 независимых уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0.$$

Лагранжиан в действительности не зависит от угловой координаты ϕ, поэтому приведенное выше уравнение движения определяет один из интегралов движения:

$$J_z := m\rho^2\dot{\phi} = \text{const},$$

это z-проекция вектора углового момента частицы.

Второе уравнение движения записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}(1 + \rho^2 e^{-\rho^2})) = m\rho\dot{\phi}^2 - k\rho(1 - e^{-\rho^2}) + \frac{m\dot{\rho}^2}{2}\frac{d}{d\rho}(\rho^2 e^{-\rho^2}).$$

Поскольку Лагранжиан не зависит явно от времени: $\partial L/\partial t = 0$, то в системе существует второй интеграл движения — полная механическая энергия $E = T + U = \text{const}$.

в) Рассмотрим вопрос о движении на некотором постоянном уровне $0 < z_0 \leqslant 1$. В силу уравнения поверхности этому значению z_0 будет отвечать постоянное значение радиальной координаты ρ_0. Поскольку временная производная от константы равна нулю, второе уравнение Эйлера-Лагранжа превращается в связь:

$$\rho_0\dot{\phi}^2 = \frac{k}{m}\rho_0(1 - e^{-\rho_0^2})$$

Это уравнение допускает две возможности: либо состояние покоя в точке равновесия $z_0 = 1$ ($\rho_0 = 0$), либо равномерное вращение вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{k}{m}(1 - e^{-\rho_0^2}) = \text{const}.$$

Два отличающихся знаком значения постоянной угловой скорости $\dot{\phi}_0$ отвечают вращению по или против часовой стрелки.

Решение задачи 8 части «Математическая физика»

Проще всего задача решается применением законов сохранения энергии и импульса. Для вычисления энергии взаимодействия заряда и полусферы, найдем потенциал электростатического поля $\Phi(r)$ на расстоянии r от центра полусферы (в направлении движения точечного заряда). Введем обозначение $\sigma = Q/(2\pi R^2)$ для постоянной плотности заряда на поверхности. Тогда потенциал $\Phi(r)$ дается значением двойного интеграла по поверхности полусферы:

$$\Phi(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{k\sigma R^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR\cos\theta}}\, d\theta = \frac{kQ}{Rr}\,(R + r - \sqrt{R^2 + r^2}).$$

Здесь коэффициент k зависит от выбранной системы единиц измерения физических величин.

Обозначим буквой v величину искомой начальной скорости заряда в исходной неподвижной системе отсчета. Удаление заряда от полусферы будет максимальным в тот момент, когда его скорость *относительно полусферы* станет равной нулю. В этот момент и полусфера и заряд будут двигаться с некоторой скоростью u относительно исходной системы отсчета. Скорость u находим из закона сохранения полного импульса системы заряд — полусфера:

$$mv = Mu + mu, \qquad u = \frac{m}{M+m}\, v.$$

Согдасно требованию условия задачи, заряд в этот момент должен находиться на удалении R от центра полусферы. Записывая закон сохранения энергии для начального момента и момента максимального удаления, находим уравнение для определения скорости v:

$$\frac{mv^2}{2} - Q\Phi(0) = \frac{(M+m)u^2}{2} - Q\Phi(R).$$

Учитывая значения потенциала $\Phi(0) = kQ/R$ и $\Phi(R) = (2 - \sqrt{2})kQ/R$, получаем ответ:

$$v^2 = 2(\sqrt{2} - 1)\,\frac{(M+m)}{Mm}\,\frac{kQ^2}{R}.$$

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Приводимые ниже задачи разнятся по своему уровню, и некоторые из них значительно труднее тех, что в среднем предлагаются на вступительном экзамене на магистерские программы «Математика» и «Математика и математическая физика». Решение этих задач позволит вам, с одной стороны, уверенно и даже с некоторым запасом подготовиться к вступительным испытаниям на факультет, а с другой стороны, даст возможность почувствовать дух того, что ждёт на реальном экзамене — предложенные там задачи будут, скорее всего, немного попроще, но не менее интересны и столь же нестандартны по своим формулировкам.

Задача 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечётной суммой цифр.

Задача 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n-угольника.

Задача 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность его попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

Задача 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

Задача 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

Задача 6. Для перестановки $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$ вычислите σ^{2018}.

Задача 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 8. Найдите порядки групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ над q-элементным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 9. Можно ли вложить поле из девяти элементов в поле из двадцати семи элементов?

Задача 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Задача 11. Максимален ли идеал, порождённый элементом x в кольце
а) $\mathbb{C}[x]$ б) $\mathbb{C}[[x]]$ в) $\mathbb{Z}[[x]]$?

Задача 12. Приводим ли над полем $\mathbb{Q}$ многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ б) $x^4 + 4$?

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

Задача 14. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Задача 15. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

Задача 16. Конечно ли множество различных вложений поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$?

Задача 17. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в $\mathbb{R}^2$ и многочленов второй степени $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ определитель 4×4 матрицы

$\det(f_i(p_j)) = 0$.

Задача 18. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для а) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$ б) $\chi(t) = (t^6-1)$, $\mu(t) = (t^3-1)$ в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$? Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

Задача 19. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Всякое ли открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счётного семейства замкнутых множеств?

Задача 21. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A \times B \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 22. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \to C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

Задача 23. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное[1] отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Задача 24. Существует ли такая непрерывная сюрьекция $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0,1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной[2]?

Задача 25. С точностью до $0,01$ вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Задача 26. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0,1]$, что $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 27. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

Задача 28. Докажите, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 29. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полученного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

Задача 30. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \setminus X$, где X является объединением оси z, точки $(3,3,0)$ и единичной

[1] Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

[2] В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связен.

окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y?

Задача 31. Существуют ли такие гладкие функции $f_1,\ f_2,\ f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, причём дифференциалы функций $f_1,\ f_2,\ f_3$ линейно независимы в каждой точке множества X?

Задача 32. Вычислите $\displaystyle\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Задача 33. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\, dx_1 \dots dx_n$ для положительно определённой квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$ матрица, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 34. Для произвольно заданных комплексных матриц A, B размера $n\times n$ вычислите значение при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f / \partial x \partial y$ от матричнозначной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

Задача 35. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leqslant 1$ функции f равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\, dx = \int\limits_{|z|=1} f(z) \ln(z)\, dz\,,$$

где слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, а справа — по единичной окружности, обходимой один раз против часовой стрелки, начиная с точки $1 \in \mathbb{C}$, и логарифм действителен на положительной полуоси вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задача 36. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

Задача 37. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2}\, dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 38. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

Задача 39. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости[1].

Задача 40. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

[1]Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной

на полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

Задача 41. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.