

Приложение

УТВЕРЖДЕНО  
решение № см-21/9 от 21.09.2021 г.  
Академического руководителя  
образовательной программы  
«Совместная магистратура НИУ ВШЭ и ЦПМ»  
доцента Л.О. Бычковой

**Программа вступительного экзамена по математике  
образовательной программы  
«Совместная магистратура НИУ ВШЭ и ЦПМ»**

Москва – 2021

## **Поступающий должен иметь представление о содержании обязательных математических курсов, которые изучаются в бакалавриате.**

### **Математический анализ.**

Множество действительных чисел, аксиома непрерывности и ее следствия. Числовые множества и последовательности. Пределы последовательностей и их свойства. Предел и непрерывность функции одной и нескольких переменных. Свойства пределов. Свойства непрерывных функций. Дифференцируемость и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Производные функций одной переменной и частные производные функций нескольких переменных, их геометрический смысл. Неопределенный интеграл. Основные приемы интегрирования. Интегрируемость непрерывной функции. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона - Лейбница. Числовые и функциональные ряды, признаки сходимости. Аппроксимация функций многочленами. Метрические пространства. Непрерывные отображения метрических пространств. Компактные подмножества и свойства непрерывных отображений на них. Основные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка; линейных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Функциональные и степенные ряды, элементарные функции в комплексной плоскости и их свойства. Дифференцируемость и условия Коши – Римана.

#### **Литература**

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3–х томах. – 8-е изд.– М.: Физматлит, 2006.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. –Спб.: Лань, 2002.
4. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.
5. Рудин У. Основы математического анализа. – Спб.: Лань, 2004.

### **Алгебра и теория чисел.**

Векторные пространства. Линейные отображения векторных пространств и их матрицы. Определители матриц и их свойства. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Инвариантные подпространства. Теорема Гамильтона – Кэли. Системы линейных уравнений, метод Гаусса, правило Крамера. Евклидовы пространства, метод Грамма – Шмидта ортогонализации. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля. Разбиение группы на смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы, теорема Лагранжа. Ядро и образ гомоморфизма групп, нормальные подгруппы, факторизация и строение гомоморфизма. Группы преобразований и группы перестановок. Кольца вычетов и кольца многочленов. Алгоритм Евклида, евклидовы кольца. Конечные поля, поле комплексных чисел и его алгебраическая замкнутость. Конечные расширения полей, простые квадратичные расширения. Поля классов вычетов. Теоремы Вильсона, Ферма, Эйлера, о существовании первообразного корня по простому модулю. Сравнения по степени простого числа. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра. Цепные дроби. Представление действительных чисел цепными дробями. Квадратичные иррациональности.

#### **Литература**

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. Изд. 3–е, перераб. и доп.–М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.–Изд. 7–е.–М.: Университет, 2007.
3. Городенцев А.Л. Лекции по алгебре. Первый курс.–М.: НМУ МК, 1993
4. Ленг С. Алгебра – М.:Мир, 1968.
5. Борович З. И., Шафаревич И.Р. Теория чисел.–3-е изд.–М.:Наука, 1985
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел.– Изд.11–е, стер.–Спб.:Лань, 2006

## **Геометрия.**

Координаты точек на плоскости (в пространстве). Уравнения прямых и плоскостей. Кривые и поверхности второго порядка на плоскости (в пространстве). Конические сечения.

Векторы на плоскости (в пространстве), координаты векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Ориентированная площадь и объем.

Группа движений евклидовой плоскости и её подгруппы. Дискретные группы движений. Отражения, классификация движений. Группа подобий, группа аффинных преобразований плоскости и их подгруппы. Собственные и несобственные движения евклидовой плоскости.

Проективная прямая и проективная плоскость. Однородные координаты. Двойное отношение. Теоремы Паскаля, Бриансона, Дезарга. Проективные преобразования и их простейшие свойства. Проективная двойственность и теорема Паппа.

Пятый постулат Евклида. Неевклидовы геометрии. Плоскость Лобачевского. Угол параллельности. Модель Кэли - Кляйна и две модели Пуанкаре (в круге и в верхней полуплоскости).

Литература

1. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия – Изд. 2-е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Берже М. Геометрия, т. 1-2. М. Мир, 1984.
4. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия - М.: МЦНМО, 2009
5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. - М.: «Наука», 1978

## **Дискретная математика и начала теории вероятностей.**

Правило умножения, дерево вариантов. Применения правила умножения в комбинаторике: формулы числа перестановок, размещений и сочетаний. Бином Ньютона, биномиальные коэффициенты и их свойства, треугольник Паскаля.

Плоские графы. Теорема Эйлера для плоских графов и для многогранников.

Решение проблемы пяти красок. Полное перечисление видов правильных многогранников.

Мультипликативные функции: функция Эйлера и ее свойства; сумма делителей и число делителей.

Испытания с конечным числом исходов. Классическое определение вероятности.

Аксиоматика Колмогорова вероятностного пространства, основные формулы, вытекающие из нее. Независимые повторения испытания с двумя исходами. Формула Бернулли. Представление о законе больших чисел в форме Бернулли.

Литература

1. Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. Введение в конечную математику, М: Мир, 1965.
2. Р. Курант, Дж. Роббинс. Что такое математика. М.: МЦМНО, 2005
3. Харари Ф. Теория графов.–М.: УРСС, 2003
4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.: Либроком, 2011.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 1 т. М.: Мир, 1984.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел.– Изд. 11-е, стер.–Спб.:Лань, 2006

## Структура вступительного экзамена в 2022 году

1. Вступительный экзамен по математике проводится в устной форме.  
Начало экзамена – 10:00.
2. Экзаменационный билет содержит два вопроса и задачу. Абитуриенту предоставляется время на подготовку к ответу, не менее чем 45 мин. Абитуриент отвечает на вопросы билета устно, используя и предъявляя комиссии, записи, которые он сделал при подготовке к ответу.
3. Ответ абитуриента оценивается комиссией по 100-балльной шкале. Минимальный балл, позволяющий в дальнейшем участвовать в конкурсе на зачисление, равен 21.
4. Первый вопрос билета – решение задачи. Ответ оценивается экзаменационной комиссией в баллах от 0 до 30. Второй и третий вопросы предполагают рассказ о содержании отдельных тем школьного курса математики и методических особенностях их преподавания. За ответ на каждый из этих вопросов абитуриент может получить от 0 до 30 баллов. Итоговая оценка равна сумме оценок ответов на все вопросы билета, а также слагаемому от 0 до 10 баллов, которым комиссия может оценить профессиональный уровень и опыт абитуриента. Итоговые оценки оглашаются после окончания ответов всех абитуриентов и обсуждения этих ответов членами экзаменационной комиссии.
5. При ответе на первый вопрос (решение задачи) не предполагается полная текстовая запись решения. Достаточно указать ключевые моменты рассуждений, преобразований и вычислений, позволяющие адекватно судить о верности решения. При ответе на второй и третий вопросы билета возможны различные формы организации ответа, соответствующие подготовке и реальному опыту абитуриента. Абитуриент может:
  - рассказать о собственном опыте преподавания данной темы в школе в учреждениях основного или дополнительного образования;
  - сравнить то, как эта тема представлена в действующих школьных учебниках;
  - изложить основные понятия и формулировки и доказательства основных теорем, относящиеся к предложенной теме.
6. Ниже представлен список тем, которые используются для формирования второго и третьего вопросов билетов, а также примеры задач встречающихся в первом вопросе.

### **Список тем для вторых и третьих вопросов вступительного экзамена.**

- 1) Тождественные преобразования алгебраических выражений. Бином Ньютона.
- 2) Натуральные числа. Кольцо целых чисел. Деление нацело. Арифметика остатков.
- 3) Поле рациональных чисел. Десятичные дроби.
- 4) Иррациональные числа. Алгебраические числа.
- 5) Множество действительных чисел. Числовая прямая. Координаты точки на оси.
- 6) Поле комплексных чисел. Извлечение корня из комплексного числа.
- 7) Функция, способы задания, исследование функций элементарными методами. График.
- 8) Квадратичная функция, её свойства и график.
- 9) Элементарные преобразования графиков. Дробно-линейная функция.
- 10) Последовательности, их основные свойства. Арифметическая прогрессия.
- 11) Последовательности, их основные свойства. Геометрическая прогрессия.
- 12) Сходящиеся последовательности, основные теоремы. Число  $e$ .
- 13) Непрерывные функции. Классификация точек разрыва. Асимптоты.

- 14) Возведение в степень с натуральным и целым показателем. Свойства степени.
- 15) Возведение в рациональную степень. Основные свойства корня.
- 16) Определение логарифма и его свойства.
- 17) Логарифмическая функция и её свойства. Решение логарифмических неравенств.
- 18) Метод рационализации при решении неравенств.
- 19) Определение тригонометрических функций числового аргумента.
- 20) Формулы тригонометрии. Равносильные и неравносильные преобразования.
- 21) Множества. Основные операции над множествами и их свойства.
- 22) Мощность множеств. Счетные и несчетные множества.
- 23) Определение производной. Правила нахождения производной. Дифференциал.
- 24) Геометрический и механический смысл производной.
- 25) Исследование функций с помощью производной.
- 26) Первообразная и интеграл. Приемы интегрирования.
- 27) Применение интеграла к нахождению площадей фигур и объемов тел.
- 28) Векторы на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базисным векторам.
- 29) Скалярное произведение векторов, его свойства и применение к решению задач.
- 30) Координаты на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой и плоскости.
- 31) Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников.
- 32) Углы, вписанные в окружность. Вписанные и описанные четырехугольники.
- 33) Площади фигур и их свойства.
- 34) Основные понятия и теоремы стереометрии.
- 35) Многогранники, площадь поверхности, объем. Комбинация многогранника с шаром.
- 36) Вероятностное пространство. Вероятности случайных событий. Классическая схема.
- 37) Условная вероятность. Независимые события. Схема Бернулли.
- 38) Геометрические вероятности. Случайная величина и ее распределение.

### **Примеры задач для первых вопросов вступительного экзамена.**

- 1) Каждое из чисел  $2, 3, \dots, 7$  умножают на каждое из чисел  $13, 14, \dots, 21$  и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
- 2) Перед каждым из чисел  $6, 7, \dots, 10$  и  $11, 12, \dots, 19$  произвольным образом ставят плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
- 3) В ряд, через запятые, произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.
  - а) Какое наименьшее количество единиц может быть среди выписанных чисел?
  - б) Какое наибольшее значение может принимать среднее арифметическое всех выписанных чисел?
- 4) На доске записали произвольный набор чисел, каждое из которых равно или 1, или 2, или 3, или 4, или 5. Среднее арифметическое чисел равно 4,2.
  - а) Может ли количество «пятерок» составлять 80% количества всех чисел в таком наборе?
  - б) Может ли количество «пятерок» составлять более 80% количества всех чисел в таком наборе?

- в) Каждую «пятерку» удвоили, т.е. заменили парой чисел: 5 и 5. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического нового набора чисел после такой замены.
- 5) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно  $-5$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-18$ .
- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
- б) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).
- а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
- б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
- в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.
- 7) Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ..., 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть  $A$  — четвёртое по величине среди этих чисел, а  $B$  — среднее арифметическое выбранных семи чисел.
- а) Может ли  $B - A$  равняться  $2/7$ ?
- б) Может ли  $B - A$  равняться  $3/7$ ?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности  $B - A$ .
- 8) Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 произвольно делят на три группы (в каждой группе есть хотя бы одно число). Затем вычисляют средние значения чисел в каждой из групп.
- а) Могут ли все три средних значения быть одинаковыми?
- б) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трех средних значений.
- в) То же, что и в б), но для набора 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16?
- 9) На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.
- а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
- б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
- в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.
- 10) На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.
- а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
- б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

11) Семь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $1/30$ ?

б) равняться  $1/35$ ?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

12) В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

13) Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?

в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.