

Национальный исследовательский университет  
«Высшая Школа Экономики»  
Демо-версия вступительного испытания НИУ ВШЭ - 2022 г.  
Магистратура «Науки о данных»

Время выполнения задания - 240 мин. Решения задач должны быть записаны по-русски.  
Каждая задача оценивается в 10 баллов, максимальная сумма - 100 баллов.

### Математический анализ

1. Вычислите определенный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x) + 2} dx.$$

2. Исследуйте функцию  $f(x)$  и постройте ее график

$$f(x) = \sqrt{x(3-x^2)}.$$

В задании необходимо:

- 2.1 Определить область существования функции и исследовать ее поведение в граничных точках последней.
- 2.2 Выяснить симметрию графика и периодичность.
- 2.3 Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.
- 2.4 Определить нули функции и области постоянства знака.
- 2.5 Найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции.
- 2.6 Определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции.
- 2.7 Найти асимптоты в случае их существования.
- 2.8 Указать те или иные особенности графика.

В случае невозможности установить какую-либо из величин аналитически, указать для нее разумные верхние и нижние границы.

### Алгебра

3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу  $B$ , равную  $B = A^{2021} - 5A^{2020} + 2A^{2019} + 5A^{2018} - 3A^{2017} + A^2$ .

### Теория чисел

4. Решить в целых числах уравнение пусть  $a$  и  $b$  два натуральных, взаимно простых числа. Пусть  $p$  – простое, нечетное число. Найти всевозможные значения наибольшего общего делителя

$$\text{НОД} \left( a + b, \frac{a^p + b^p}{a + b} \right) = ?$$

### Алгоритмы

5. Назовём вершину ориентированного графа «чёрной дырой», если в неё приходят рёбра из всех других вершин, но из неё не выходит ни одного ребра.

Предложите алгоритм, находящий в графе «чёрную дыру» или определяющий, что таковой в графе нет. Ваш алгоритм должен работать за  $O(E + V)$  операций,  $E$  — число рёбер графа, а  $V$  — число вершин. Считайте, что граф задан списками смежности.

Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В этом задании нельзя апеллировать к реализациям структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования. Все используемые алгоритмы должны быть подробно описаны.

6. Дан массив  $A[1:n]$ , состоящий из строк длины не больше  $d$ , представляющих некоторые целые числа в десятичной записи (и не содержащих ведущих нулей).

(а) Предложите алгоритм, находящий максимальное (по величине) число, которое можно было бы составить из этих чисел (числа конкатенируются как строки и интерпретируются в десятичной записи). Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

(б) Оптимизируйте алгоритм так, чтобы он выполнялся за  $o(n^2)$  (о-малое!) операций. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В обоих пунктах нельзя апеллировать к реализациям структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования. Все используемые алгоритмы должны быть подробно описаны.

## Дискретная математика

7. Отношение эквивалентности определено на множестве из 6 элементов и содержит 2 класса эквивалентности по 3 элемента. Можно ли его представить в виде пересечения двух различных отношений эквивалентности?

Напоминание: отношение эквивалентности является рефлексивным, симметричным и транзитивным бинарным отношением.

## Графы

8. Всегда ли будет двудольным связный граф с набором степеней вершин  $(4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ?

## Теория вероятностей

9. Случайная величина  $X$  задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{\pi}}$$

Найдите мат. ожидание случайной величины  $Z = X^2 - X + 1$ .

## Математическая статистика

10. Предполагается, что результаты измерений приведенные в таблице ниже

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
1.8080	3.2900	3.4050	2.4490	3.1140	1.7600	2.3230	3.3160	3.0820	3.4050

распределены равномерно, с функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

Оцените параметры  $a$  и  $b$ , используя метод моментов.