Демонстрационный вариант экзамена по высшей математике для поступающих на магистерские программы: «Экономика и экономическая политика», «Статистическое моделирование и актуарные расчеты», «Статистический анализ в экономике», «Аграрная экономика»

В каждом вопросе требуется отметить только один ответ (из A–E), который вы считаете правильным. Если вы считаете, что среди предложенных вариантов более одного правильного, отметьте любой из них, но только один. Можно пользоваться обычным (не программируемым) калькулятором.

Правила оценивания вопроса:

- правильный ответ — балл, указанный в начале вопроса
- отсутствие ответа или неправильный ответ — 0 баллов

Итоговый балл за экзамен — сумма баллов за каждый вопрос

Максимальная сумма 100 баллов

Длительность экзамена 2 часа (120 минут)

Вопрос 1 7 баллов

Предел $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$ равен

A 0
B –1
C 1/3
D 1
E числу, отличному от перечисленных в A–D, или не существует

Решение. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$. Значит, предел равен –1.

Ответ B

Вопрос 2 8 баллов

Задана квадратичная форма $f(x,y)=(p+1)x^2+2pxy+2y^2$. Тогда

A при $-1<p<0$ квадратичная форма положительно определена
B при $p>2$ квадратичная форма положительно определена
C при $0<p<1$ квадратичная форма положительно определена
D при $1<p<3$ квадратичная форма положительно определена
E все утверждения A–D являются ложными

Решение. Квадратичной форме $f(x,y)$ соответствует матрица $A=\begin{bmatrix} p+1 & p \\ p & 2 \end{bmatrix}$. В силу критерия Сильвестра матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p+1>0 \\ 2(p+1)-p^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p>-1 \\ 1-\sqrt{3}<p<1+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3}<p<1+\sqrt{3}\text{, т.к. } -1<1-\sqrt{3}.$$

Ясно, что $-1<1-\sqrt{3}<0<1<2<1+\sqrt{3}<3$, поэтому из предложенных вариантов подходит только C. **Ответ C**

Вопрос 3 8 баллов

Дана матрица $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & p \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Матрица A имеет наименьший ранг, если p равно

A 5
B 6
C 7
D 8
E числу, отличному от перечисленных в A–D

Решение. Применим метод Гаусса. Вычтем первую строку, умноженную на соответствующее число, из остальных, чтобы обнулить первый столбец, начиная со второго элемента, и продолжаем этот процесс:

$$A\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & p \\ 0 & 1 & -2 & -1-2p \\ 0 & 1 & -5 & -6-2p \\ 0 & 0 & -3 & 2-p \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & p \\ 0 & 1 & -2 & -1-p \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2-p \end{bmatrix}$$

Так как определитель матрицы третьего порядка в левом верхнем углу не равен нулю при любом *p*, то $r(A)\ge 3$ при любом *p*. Если $-5=2-p$, т.е. при $p=7$, третья и четвертая строки совпадают, значит $r(A)=3$. Легко доказать, что это единственное значение *p*.

Ответ C

Вопрос 4 8 баллов

Задана функция $f(x)=(x-1)^3(x+1)^3$. Тогда

A функция $f(x)$ не ограничена снизу
B функция $f(x)$ имеет ровно две точки локального минимума
C график функции $f(x)$ имеет ровно четыре точки перегиба
D функция $f(x)$ имеет ровно одну точку локального максимума
E все утверждения A–D являются ложными

Решение. Легко видеть, что $f(x)=(x^2-1)^3$. Так как $x^2-1\ge -1$ при любом *x*, то $f(x)\ge -1$ при любом *x*. Значит утверждение A ложное. Далее, $f'(x)=6x(x^2-1)^2$ и $f'(x)\le 0$ при $x<0$, $f'(x)\ge 0$ при $x>0$. Значит, точка $x=0$ — точка глобального минимума и других локальных экстремумов нет. Значит утверждения B, D ложные. Имеем:
$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)=30(x+1)(x+1/\sqrt{5})(x-1/\sqrt{5})(x-1)$ — вторая производная обращается в 0 в четырех точках и меняет знак при переходе через каждую такую точку. Значит, это точки перегиба, т.е. C — истинное утверждение. **Ответ C**

Вопрос 5   8 баллов

Пусть $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$. Тогда

A   функция $f(x)$ является четной

B   в точке $x = 2$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения

C   график функции $f(x)$ имеет наклонную (не горизонтальную и не вертикальную) асимптоту

D   на отрезке [–3,–1] функция $f(x)$ является выпуклой

E   все утверждения A–D являются ложными

Решение. Область определения функция $f(x)$ — множество $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Поскольку для любого $x \in D_f$ выполнено включение $-x \in D_f$ и $f(-x) = -x - \dfrac{4}{x} = -f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, то функция $f(x)$ является нечетной. Значит утверждение A ложно.

Имеем: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Значит, $f'(2) = 0,$ $f'(x) < 0$ при $0 < x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$. Таким образом, точка $x = 2$ является точкой локального минимума, но не является точкой наименьшего значения функции $f(x)$, поскольку $f(2) = 4$, а, например, $f(-2) = -2 < 2$. Значит, утверждение B ложно.

Так как $|f(x) - x| = \left|\dfrac{4}{x}\right| \to 0$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, то график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = x$. Значит, утверждение C истинно.

Имеем: $f''(x) = \dfrac{12}{x^3} < 0$ при $x < 0$, следовательно, на отрезке [–3,–1] функция $f(x)$ является вогнутой — утверждение D ложно.   **Ответ C**

Вопрос 6   8 баллов

Пусть $y = y(x)$ — решение дифференциального уравнения $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$ с начальным условием $y(0) = 1$. Обозначим через D_y область определения функции $y(x)$. Тогда

A   множество D_y является неограниченным

B   функция $y(x)$ достигает глобального максимума в D_y

C   график функции $y(x)$ имеет наклонную (не вертикальную и не горизонтальную) асимптоту

D   график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту

E   все утверждения A–D являются ложными

Решение. Область определения D_y должна содержать точку $x = 0$. Максимальный интервал, который содержит 0 и на котором определена функция $\operatorname{tg} x$ — это интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Значит, $D_y \subset (-\pi/2, \pi/2)$. Следовательно утверждение A ложное.

Уравнение $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$ является линейным однородным уравнением, решением которого с учетом начального условия является функция $y(x) = y(0) \cdot \exp\left(\int_0^x \operatorname{tg} y\, dy\right), x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Имеем: $\int \operatorname{tg} y\, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\int \frac{d(\cos y)}{\cos y} = -\ln(|\cos y|) + C$. Учитывая, что $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, получаем: $y(x) = \frac{1}{\cos x}, x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Таким образом, утверждение B ложное, так как функция не ограничена на D_y,

Утверждение C очевидно ложное, так как область определения функции ограничена, а утверждение D истинное, так как график функции имеет две вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ D

Вопрос 7 8 баллов

Правильный кубик подбрасывается до тех пор, пока не появится "6". Вероятность того, что потребуется, по крайней мере, пять подбрасываний равна (укажите ближайшее число)

(A) 0.58
(B) 0.48
(C) 0.69
(D) 0.36
(E) 0.72

Решение. Событие, о котором говорится в условии, осуществляется тогда и только тогда, когда в первых четырех подбрасываниях не появилась «6». Непоявление «6» в одном подбрасывании происходит с вероятностью 5/6, а подбрасывания независимы, то вероятность события равна $\frac{5^4}{6^4} = 0.482$.

Ответ B

Вопрос 8 9 баллов

Случайное отклонение размера детали от номинала при ее изготовлении на данном станке имеет нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением 5 *мк*. Какое минимальное количество деталей необходимо изготовить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более чем на 2 *мк*?

A 6
B 7
C 8
D 9
E число деталей, отличное от перечисленных в A–D

Решение. Пусть $X \sim N(0, 5^2)$ – случайное отклонение. Предположим, что изготовлено n деталей, и пусть C – количество годных деталей среди них. Тогда C имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), где $p = \mathrm{P}(|X| < 2) = \mathrm{P}(|Z| < 0.4) = 0.311$, где Z — стандартная нормальная случайная величина. Требуемое число n находится из условия $\mathrm{P}(C = 0) < 0.1 \Leftrightarrow (1-p)^n < 0.1 \Leftrightarrow n \geq 7$. Минимальное число деталей равно 7.

Ответ B

Вопрос 9 9 баллов

Прибор состоит из двух блоков. Время безотказной работы каждого блока имеет показательное распределение с параметрами $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, причем отказ каждого блока происходит независимо от другого. (Плотность распределения показательной случайной величины с параметром λ есть $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0$ и $f(x) = 0, x < 0$.) Прибор выходит из строя, если хотя бы один блок выходит из строя. Тогда среднее время безотказной работы прибора равно (укажите ближайшее число)

A 2.5
B 3
C 3.5
D 4
E 5

Решение. Заметим вначале, что случайная величина *X* является показательной с параметром λ тогда и только тогда, когда $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$. Пусть теперь T_i, $i = 1, 2$ – время безотказной работы *i*-го блока, $i = 1, 2$, и T – время безотказной работы прибора. Тогда $T = \min(T_1, T_2)$, $P(T > x) = P(T_1 > x)\,P(T_2 > x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$. Значит, величина *X* имеет показательное распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Следовательно,

$E(T) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_1} = \frac{24}{7} = 3.43$. **Ответ C**

Вопрос 10 9 баллов

Для нормальной генеральной совокупности $N(m, \sigma^2)$ для тестирования гипотезы $H_0 : m = 5$ против альтернативы $H_a : m > 5$ на 5%–ном уровне значимости используется стандартный *t*–тест. Какие из перечисленных ниже величин возрастают при возрастании объёма выборки?

I. Значимость теста.
II. Вероятность ошибки второго рода.
III. Мощность теста.

A только I
B только II
C только III
D только I и III
E Ни один из вариантов A–D не даёт правильного набора ответов

Решение. Стандартный *t*–тест устроен следующим образом.

1) По выборке $X_1, ..., X_n$ вычисляются выборочные статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

2) Строится тестовая статистика $t = \frac{(\bar{X} - 5)\sqrt{n}}{s}$, которая при нулевой гипотезе имеет распределение Стьюдента $t(n-1)$.

3) Статистика t сравнивается с процентной точкой $t_{0.05}(n-1)$, и если $t > t_{0.05}(n-1)$, нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативы.
I. По построению значимость теста равна 0.05 при любом объёме выборки n — утверждение ложное.
II. *Не очень строго.* Вероятность ошибки второго рода — это
$P(t \le t_{0.05}(n-1)) = P\left(\frac{(\bar{X}-5)\sqrt{n}}{s} \le t_{0.05}(n-1)\right)$, если $m > 5$, При увеличении n $\bar{X}$ приближается к m, s к σ, поэтому t возрастает, так как $m > 5$. Величина $t_{0.05}(n-1)$ с ростом n уменьшается, так как «хвосты» распределения Стьюдента становятся «легче», и вероятность ошибки второго рода уменьшается — утверждение ложное.
III. Так как мощность теста — это 1 минус вероятность ошибки второго рода, то с ростом n мощность растет — утверждение истинное. **Ответ C**

Вопрос 11 9 баллов

Есть выборка размера 40 из первой генеральной совокупности и выборка объёма 20 из второй генеральной совокупности, у которой среднее значение m такое же как у первой, а стандартное отклонение в два раза больше, чем стандартное отклонение первой генеральной совокупности. Генеральные совокупности независимые. Рассматриваются три оценки среднего значения m: $\hat{m}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{m}_2 = \bar{X}_2$, $\hat{m} = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{3}\hat{m}_2$, где $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ — выборочные средние первой и второй выборки, соответственно. Какие из перечисленных ниже утверждений являются истинными?

I. Все оценки $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}$ являются несмещёнными оценками параметра m.

II. Оценка $\hat{m}_1$ эффективнее оценки $\hat{m}$.

III. Оценка $\hat{m}$ эффективнее оценки $\hat{m}_2$.

A только I
B только II
C только III
D только II и III
E Ни один из вариантов A–D не даёт правильного набора ответов

Решение. Пусть $\sigma, 2\sigma$ — стандартные отклонения первой и второй генеральных совокупностей. Из свойств математического ожидания и дисперсии получаем:
$E(\hat{m}_1) = E(\hat{m}_2) = m, E(\hat{m}) = \frac{5}{6}m, V(\hat{m}_1) = \frac{\sigma^2}{40} = 0.025\sigma^2, V(\hat{m}_2) = \frac{4\sigma^2}{20} = \frac{\sigma^2}{5} = 0.2\sigma^2$,
$V(\hat{m}) = \frac{1}{4}V(\hat{m}_1) + \frac{1}{9}V(\hat{m}_2) = \frac{\sigma^2}{160} + \frac{\sigma^2}{45} = 0.028\sigma^2$.
Оценки $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ несмещенные, значит (MSE — среднеквадратичная ошибка соответствующей оценки),
$MSE(\hat{m}_1) = V(\hat{m}_1) = 0.025\sigma^2$, $MSE(\hat{m}_2) = V(\hat{m}_2) = 0.2\sigma^2$.
$MSE(\hat{m}) = V(\hat{m}) + bias^2(\hat{m}) = 0.028\sigma^2 + \frac{m^2}{36}$.
Ясно, что при любых m, σ^2: $MSE(\hat{m}_1) < MSE(\hat{m}_2), MSE(\hat{m}_1) < MSE(\hat{m})$. Соотношение между $MSE(\hat{m}_2)$ и $MSE(\hat{m})$ зависит от m, может быть $MSE(\hat{m}_2) < MSE(\hat{m})$, может быть $MSE(\hat{m}_2) > MSE(\hat{m})$.

Поэтому I ложно, II истинно, III ложно. **Ответ В**

Вопрос 12 9 баллов

Пусть Y — зависимая переменная, X, Z — независимые переменные. По 12 наблюдениям методом наименьших квадратов оценены две регрессии

(1) $Y = \underset{(3.1)}{10.2} + \underset{(2.2)}{6.2} \cdot X - \underset{(2.3)}{4.7} \cdot Z$, $R_1^2 = 0.46$

(2) $Y = 7.8 + 5.4 \cdot (X - Z)$, $R_2^2 = 0.39$

$TSS = \sum_{i=1}^{12} (Y_i - \bar{Y})^2 = 202.2$, R^2 — коэффициент детерминации, в скобках — стандартные ошибки. Тогда

A для модели $Y = \alpha + \beta \cdot X - \gamma \cdot Z + \varepsilon$ гипотеза $H_0 : \beta = \gamma$ отвергается в пользу альтернативы $H_a : \beta \neq \gamma$ на 5%–ном уровне значимости

B сумма квадратов остатков регрессии (1) равна 120

C регрессия (2) в целом не значима (не адекватна) (на 5%-ном уровне)

D в регрессии (1) коэффициент β значим (на 5%-ном уровне)

E все утверждения A–D являются ложными

Решение. Для тестирования гипотезы $H_0 : \beta = \gamma$ воспользуемся тестовой статистикой $F = \dfrac{(R_1^2 - R_2^2)/q}{(1 - R_1^2)/(n-k)}$, где $q = 1$ — число ограничений, $n = 12$ — число наблюдений, $k = 3$ — число регрессоров в (1), которая при нулевой гипотезе имеет распределение $F(q, n-k) = F(1,9)$. Имеем: $F = 1.167$. Поскольку $F_{0.05}(1,9) = 5.12 > 1.167$, нулевая гипотеза на 5%–ном уровне не отвергается, т.е. утверждение А ложное.

Сумма квадратов остатков регрессии $RSS = TSS \cdot (1 - R^2)$, поэтому для (1) получаем $RSS = 109.19$. Значит, утверждение В ложное.

Для проверки значимости (адекватности) регрессии (2) в целом воспользуемся статистикой $F = \dfrac{R^2}{1 - R^2} \dfrac{n-k}{k-1}$, где $n = 12$ — число наблюдений, $k = 2$ — число регрессоров.

Нулевая гипотеза: регрессия в целом не значима. При нулевой гипотезе F имеет распределение $F(k-1, n-k) = F(1,10)$. Имеем: $F = 6.39$. Поскольку $F_{0.05}(1,10) = 4.96 < 6.39$, нулевая гипотеза отвергается (на 5%–ном уровне значимости), т.е. регрессия в целом значима, значит утверждение С ложное.

Тестовой статистикой для проверки значимости коэффициента является величина $t = \dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$, которая при нулевой гипотезе (коэффициент не значим) имеет распределение $t(n-k) = t(9)$. Имеем: $t = 2.58 > 2.26 = t_{0.25}(9)$, значит, коэффициент β значим, т.е. утверждение D истинное. **Ответ D**