

Время выполнения задания — 240 мин.

Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов. Допускается использование бухгалтерского калькулятора и таблиц статистических распределений; черновики собираются, но не проверяются.

**Задача 1 (Теория чисел).** При каких натуральных  $n$  число  $5^{2n+1}2^{n+2} + 3^{n+2}2^{2n+1}$  делится нацело на 19?

**Задача 2 (Математический анализ).** Вычислить двойной интеграл  $\int \int_D (x+y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена кривой  $x^2 + y^2 = x + y$ .

**Задача 3 (Алгебра).** Пусть матрица  $A$  размера  $3 \times 3$  такова, что для любого вектора столбца  $v \in R^3$  вектора  $Av$  и  $v$  ортогональны. Доказать, что  $A^t + A = 0$ , где  $A^t$  транспонированная матрица.

**Задача 4 (Алгоритмы).** Дано дерево на  $n$  вершинах. На рёбрах дерева написаны целые числа в двоичной записи (можно считать, что все имеют одинаковое количество двоичных разрядов).

Требуется уметь находить *xor* всех чисел на рёбрах пути из вершины  $u$  в вершину  $v$  для любых заданных пользователем вершин  $u$  и  $v$ . Операция *xor* — это побитовое исключающее или. Например,  $1010 \text{ xor } 1100 = 0110$ .

(a) Во многих ситуациях бывает полезно сделать *предподсчёт*: заранее произвести некоторые вычисления и сохранить их результаты в памяти, чтобы в дальнейшем ускорить вычисления. Простой пример: если нам дан некоторый текст и нужно уметь быстро отвечать на запросы вида “сколько раз слово  $x$  встречается в тексте после слова  $y$ ”, то можно заранее подсчитать, сколько раз встречается в тексте каждое словосочетание из двух слов, и это позволит в дальнейшем очень быстро отвечать на вопрос (за стоимость запроса к памяти). Придумайте какой-либо вариант предподсчёта для задачи вычисления *xor* вдоль путей. Оцените, сколько операций потребует предподсчёт, сравните число операций, требуемое для вычисления *xor* вдоль пути без предподсчёта и с использованием предложенного вами способа предподсчёта.

(b) Придумайте, как выполнить некоторый предподсчёт за время  $O(n)$ , который позволит впоследствии отвечать на запрос *xor* за время  $O(1)$ .

**Задача 5 (Алгоритмы).** На плоскости задан набор точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

(a) Предложите алгоритм, определяющий, обладает ли множество этих точек осью симметрии, параллельной оси  $y$ . Оцените количество арифметических операций и операций сравнения, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать ваш алгоритм.

(b) Оптимизируйте алгоритм, чтобы он работал за время  $O(n \log n)$ .

**Задача 6 (Графы).** В плоском двусвязном графе 7 граней (считая внешнюю) — 3 треугольника, 3 четырёхугольника и пятиугольник. Сколько в этом графе вершин и рёбер? Приведите пример диаграммы графа.

**Задача 7 (Оптимизация).** Решить задачу оптимизации:

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^n x_i (\ln x_i - c_i)$$

$$\text{при условии, что } \sum_{i=1}^n x_i = 1, \text{ где}$$

$c \in R_+^n$  — заданный вектор с неотрицательными элементами.

**Задача 8 (Алгебра).** Матрицей перестановки порядка  $n$  называется такая матрица размера  $n$  на  $n$ , составленная из 0 и 1, что сумма (в поле действительных чисел) элементов по каждому ее столбцу и каждой строке равна 1. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$  — собственные числа матрицы перестановки порядка 5

$$P_{\pi}^{\{5\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите  $\lambda^* = \min_i |\lambda_i|$

**Задача 9 (Теория вероятностей).** Независимые одинаково распределенные случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$  принимают только значения 2 и 3, при этом значение 3 принимается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что сумма данных величин будет равна 46.

**Задача 10 (Математическая статистика).** Программист желает найти доверительный интервал для математического ожидания времени работы программы с надежностью  $\gamma = 0,95$ . Известно, что выборочное среднее времени работы 65 циклов программы составило 0,09 сек. Найдите искомый доверительный интервал в предположении, что времена работы программы за различные циклы независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, при этом генеральное среднее квадратичное отклонение равно 0,02.