Утверждена Ученым Советом
факультета математики НИУ ВШЭ,
протокол № 20/эл-1409 от 14.09.2020.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Математики

ПРОГРАММА

подготовки к экзамену для поступающих на образовательные программы магистратуры «Mathematics» и «Математика и математическая физика»

по дисциплине «Математика»

Академический руководитель программы

проф. ф-та математики А. Л. Городенцев

Москва, 2020 год

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ПОРЯДОК ПОСТУПЛЕНИЯ, ПРОГРАММА И ДЕМО-ВЕРСИЯ ЭКЗАМЕНА ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА МАГИСТЕРСКИЕ ПРОГРАММЫ «MATHEMATICS» И «МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

СОДЕРЖАНИЕ

Порядок проведения вступительных испытаний

Две программы и два профиля обучения

На факультете математики имеется две магистерские образовательные программы:

- англоязычная программа «Mathematics»
- русскоязычная программа «Математика и математическая физика».

Различие между ними заключается *только* в их языковом статусе. Официальным языком обучения на программе «Mathematics» является английский[1], а на программе «Математика и математическая физика» — русский.

Каждый студент магистратуры, вне зависимости от того, на какой из двух программ он учится, отдельно выбирает для себя *профиль обучения*. Таковых имеется два:

- математика
- математическая физика.

Формально они различаются весьма небольшим набором обязательных курсов и семинаров, неформально — тем, чему: математике или матфизике будет уделено основное внимание в ходе учёбы и научной работы. Выбор профиля обучения осуществляется студентами сразу после зачисления и *ничем не ограничен*: независимо от того, на какую из программ, «Mathematics» или «Математика и математическая физика», студент зачислен и независимо от своих результатов на вступительном экзамене каждый студент может (и должен) выбрать себе *любой* из двух профилей обучения. Именно от этого выбора, а не от того, на какой программе Вы учитесь, будут зависеть содержательные математическая и физическая составляющие Вашего образования.

Вне зависимости от выбранной программы и профиля, студент составляет индивидуальный учебный план, свободно выбирая (по согласованию с научным руководителем) курсы из числа читаемых на факультете. Например, выбрав трек Математика, можно уделить внимание и курсам по физике, а можно, наоборот, ограничиться чисто математическими предметами. Единственное важное ограничение — на англоязычной программе нельзя выбирать русскоязычные курсы[2]. Это несколько ограничивает ассортимент курсов на англоязычной программе.

[1] Одно из последствий англоязычности заключается в том, что выпускникам программы «Mathematics» при поступлении во многие англоязычные аспирантуры *не требуется* подтверждать уровень своего английского отдельным языковым сертификатом — диплом об окончании англоязычной программы частенько его заменяет.

Другое последствие англоязычности — необходимость слушать и сдавать курсы, писать и защищать диплом на английском языке; это требует серьезной подготовки.

[2] Точнее, можно, но не более 20%, и в этом случае английский не будет указан в дипломе как единственный язык освоения программы.

Общий конкурс

Зачисление на обе магистерские программы «Mathematics» и «Математика и математическая физика» происходит по единому и *общему для двух программ* конкурсу, который проводится на основании результатов одного, общего для двух программ письменного вступительного экзамена по математике. Участники конкурса упорядочиваются по убыванию полученного на экзамене результата, и все абитуриенты, чей результат оказывается в пределах официально установленных проходных баллов для обучения на бюджетных или платных местах, считаются успешно прошедшими единый конкурс.

Распределение успешно прошедших единый конкурс студентов между образовательными программами «Mathematics» и «Математика и математическая физика» осуществляется по желанию студентов на основании результатов внутреннего тестирования по английскому языку. Тестирование проводится после объявления результатов единого конкурса и *не является обязательным*. К тестированию допускаются все успешно прошедшие единый конкурс, вне зависимости от того по какому из двух профилей «математика» или «математическая физика» они в дальнейшем собираются обучаться. Участие в тестировании и его результаты не влияют на возможность дальнейшего выбора профиля. Они существенны только для студентов, желающих обучаться на англоязычной программе «Mathematics»: для зачисления на англоязычную программу *необходимо* пройти тестирование по английскому и показать на нём результат не ниже официально установленного[1].

После объявления результатов тестирования те, кто успешно прошёл тестирование и пожелал обучаться на программе «Mathematics», зачисляются на эту программу, а все остальные студенты, успешно прошедшие вступительный конкурс, зачисляются на программу «Математика и математическая физика».

Вступительный экзамен по математике

Вступительный экзамен состоит в письменном решении задач, условно разбитых на три группы: базовая математическая часть, состоящая из пяти задач, и две специальные части по две задачи: одна посвящена началам математической физики, а другая — дальнейшим разделам математики. Количество баллов, даваемое за полное решение задачи, указывается в её условии. Один ответ, приведённый без обоснования, оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет.

На итоговую оценку влияет только сумма баллов S, полученных за решение *ровно трёх решённых задач* — тех, за которые поставлены наибольшие баллы[2].

Итоговая оценка равна $\mathbf{min(100,} \boldsymbol{S}\mathbf{)}$. Таким образом, максимальное число баллов, которое можно набрать на экзамене, равно 100, а для его получения *не требуется* решить все задачи и, соответственно, владеть всеми разделами программы. В частности, можно получить полный балл, вовсе не зная тематики одной из специальных частей. А для получения проходного балла в прошлые годы достаточно было добросовестно освоить большинство тем общей части.

[1] Содержание тестирования и критерии оценивания: https://math.hse.ru/english_test

[2] При этом каждая задача, разбитая на пункты, учитывается как одна.

Требования к поступающим

Экзамен может содержать (и, как правило, содержит) задачи, относящиеся к следующим разделам математики.[1]

Общая часть

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки, мультиномиальные коэффициенты, производящие функции, линейные рекурренты) и основы теории вероятностей (независимость событий и случайных величин, условные вероятности, математическое ожидание, дисперсия).

- Элементарная алгебра: поле комплексных чисел, формальные степенные ряды и многочлены, выражение симметрических функций от корней многочлена через его коэффициенты, а коэффициентов — через корни, полиномиальная интерполяция, кратные корни, алгоритм Евклида для многочленов, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, экспонента и логарифм, симметрическая группа, знак и цикловой тип перестановки.

- Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственное пространство, решение систем линейных уравнений, определитель, ранг, характеристический и минимальный многочлены матрицы, тождество Гамильтона – Кэли, собственные числа и собственные векторы, жорданова нормальная форма комплексной матрицы, вычисление аналитических функций от матриц и операторов, билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, индекс вещественной квадратичной формы.

- Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^n$: расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса, кривые второго порядка на евклидовой плоскости.

- Одномерный и многомерный вещественный анализ: мощность множества, счетные и несчетные множества, пределы последовательностей и функций, числовые и функциональные ряды, ряд Тейлора, непрерывность и дифференцируемость функций и отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, производные сложных и неявных функций, отыскание условных и безусловных экстремумов, первообразная и интеграл, сведение многомерных интегралов к повторным одномерным, несобственные интегралы, вычисление длины кривой и площади поверхности с помощью интегрирования. Открытые, замкнутые и компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, их касательные пространства.

- Основы комплексного анализа: основная теорема алгебры, комплексная производная функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, голоморфные и мероморфные функции, интеграл

[1] Напоминаем, что приведенные выше правила оценивания экзамена позволяют получить максимальный балл, не решая все задачи, и, соответственно, не владея всеми разделами программы. В частности, можно получить полный балл, вовсе не зная тематики одной из специальных частей. А для проходного балла в прошлые годы достаточно было освоить большинство тем общей части.

Коши, ряды Лорана и радиус сходимости, теорема о вычетах, вычисление интегралов (включая неопределённые и несобственные) при помощи вычетов, многозначные функции, аналитическое продолжение вдоль пути.

- Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения, элементарные приёмы интегрирования (разделение переменных, однородные уравнения, линейные уравнения первого порядка, уравнения в дифференциалах, интегрирующий множитель), системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, определитель Вронского, уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД, 2000.

В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис, 1999.

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М: Наука, 1973.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, 2004.

В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, Том 1*, М.: Мир, 1967

Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

Также см. список литературы и задач к программе итогового экзамена бакалавриата Факультета математики: https://www.hse.ru/ba/math/final_exam

Специальная часть «Математика»

- Элементы коммутативной алгебры: коммутативные кольца и их гомоморфизмы, идеалы и фактор кольца, кольца вычетов и китайская теорема об остатках, факториальность кольца многочленов от многих переменных, классификация конечно порождённых абелевых групп, поля и гомоморфизмы полей, характеристика, описание и примеры конечных полей.
- Элементы геометрии: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, взаимное расположение проективных и аффинных подпространств, выпуклые фигуры в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка, аффинные и проективные кривые и поверхности второго порядка (квадрики и коники).
- Элементы некоммутативной алгебры: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы, прямое произведение групп, группы симметрий геометрических фигур, ассоциативные кольца и алгебры, матричные группы Ли GL_n, SL_n, SO_n, SU_n, понятие представления группы.
- Элементы топологии: метрические и топологические пространства, всюду плотные и нигде не плотные множества, компактность, связность, внутренность, замыкание, непрерывные отображения и гомеоморфизмы, гомотопии, фундаментальная группа (в том числе для S^n и RP^2).
- Элементы функционального анализа: равномерная непрерывность и равномерная сходимость непрерывных функций, мера Лебега, гильбертовы пространства (включая пространства суммируемых с квадратом функций).

Рекомендуемые учебники

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ, 2007.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

Дополнительная литература: https://math.hse.ru/books

Специальная часть «Математическая физика»

- Основы классической механики: законы Ньютона, потенциальные силы, работа силы вдоль траектории, законы сохранения, лагранжиан и уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) для механической системы в поле потенциальных сил.
- Классическая электродинамика в вакууме: закон Кулона, поле и потенциал, поля и энергия взаимодействия простейших конфигураций зарядов (сферы, плоскости, точечные заряды). Движение заряженной частицы в однородном магнитном и электрическом поле, сила Лоренца.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М: Наука, 1979.

Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М., Наука, 1974.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М: Физматлит, 2004.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М: Физматлит, 2004.

Демонстрационный вариант экзаменационного задания

На выполнение задания отводится 180 минут. Во время экзамена разрешается пользоваться только ручкой и бумагой. Использование иных носителей информации, в том числе любых электронных устройств или шпаргалок, строго запрещено, равно как и всякое общение с кем-либо кроме экзаменаторов. Нарушение этих правил является поводом для отстранения от вступительных испытаний. На экзамене разрешается иметь при себе питьевую воду и шоколад (или их аналоги).
Количество баллов, даваемое за полное решение задачи, указывается в её условии. Один ответ, приведённый без обоснования, оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Участник может сдать решения любого числа задач из любых частей задания; при этом на итоговую оценку повлияет только сумма баллов S, полученных за решение *ровно трёх решённых задач* — тех, за которые выставлены наибольшие баллы (задача, разбитая на пункты, учитывается как одна). Итоговая оценка равна $\mathbf{min(100, S)}$.

Общая часть

Задача 1 (27 баллов). Пусть числа $p, q \in \mathbb{C}$ таковы, что многочлен $f = x^3 + px + q$ имеет три различных корня. Существует ли многочлен второй степени, значение которого в каждом из корней многочлена f равно произведению двух других корней многочлена f? Если да, явно вычислите его коэффициенты. Если нет, объясните почему.

Задача 2 (один пункт – 18 баллов, оба – 27 баллов). Существует ли такая комплексная 3×3 матрица X, что матрица e^X равна

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$? в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

Задача 3 (27 баллов). Игральный кубик бросают до тех пор, пока одно и то же число очков не выпадет два раза подряд. Найдите математическое ожидание количества сделанных бросков.

Задача 4 (27 баллов). На координатной плоскости вправо по оси абсцисс с единичной скоростью бежит суслик, а по узкой реке в форме графика функции $y = 1/(x+1)$ плывёт акула, всё время держащаяся в самой близкой к суслику точке реки. Какова абсолютная величина скорости акулы в тот момент, когда она пересекает ось ординат?

Задача 5 (36 баллов). Функция вещественной переменной x задана в виде несобственного интеграла

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\, dt\,.$$

Найдите явный вид функции $F(x)$.

Специальная часть «Математика»

Задача 6 (Один пункт – 27 баллов, оба – 36 баллов). Являются ли двумерная сфера с тремя различными выколотыми точками и двумерный тор с одной выколотой точкой

а) гомеоморфными?

в) гомотопически эквивалентными?

Задача 7 (Один пункт – 27 баллов, оба – 36 баллов). Допускает ли симметрическая группа S_4

а) нетривиальный гомоморфизм в группу нечётного порядка?

в) вложение в группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Если да, постройте явный пример. Если нет, объясните почему.

Специальная часть «Математическая физика»

Задача 8 (36 баллов). Тонкое проводящее кольцо массы M и радиуса R имеет электрический заряд q. Противоположный ему по знаку точечный заряд $-q$ массы m находится на расстоянии a от центра кольца на проходящей через этот центр перпендикулярно плоскости кольца оси ℓ. В начальный момент кольцо и точечный заряд покоятся. Какую минимальную скорость вдоль оси ℓ надо сообщить точечному заряду, чтобы он смог удалиться сколь угодно далеко от кольца? Какую скорость приобретёт в итоге кольцо? Всеми силами, кроме электростатических, следует пренебречь.

Задача 9 (36 баллов). Однородный тонкостенный цилиндр массы M и радиуса R без проскальзывания скатывается в однородном поле тяжести из состояния покоя по наклонённой под углом α к горизонту плоскости Π так, что его ось всё время остаётся горизонтальной. Определите время, за которое он пройдёт по плоскости Π расстояние s.

Решения задач демонстрационного варианта

Решение задачи 1 общей части

Ответ: такой многочлен заведомо существует. Чтобы написать его, обозначим корни данного многочлена $x^3 + px + q$ через α_1, α_2, α_3. По формулам Виета,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = p \tag{2}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q\,. \tag{3}$$

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа, квадратный трёхчлен, принимающий при $x = \alpha_1$, α_2, α_3 заданные значения $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$, равен

$$\alpha_2\alpha_3\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_3\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_2\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\,.$$

Приводя все дроби к общему знаменателю $\Delta = (\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)$ и пользуясь тем, что в силу соотношения (1) при всех $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$

$$(x-\alpha_i)(x-\alpha_j) = x^2 + \alpha_k x + \alpha_i\alpha_j\,,$$

перепишем три слагаемых предыдущей суммы как

$$\begin{aligned}
&+\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\Delta}(x^2+\alpha_1x+\alpha_2\alpha_3)\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_2x+\alpha_1\alpha_3)\\
&+\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_3x+\alpha_1\alpha_2)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент при x^2 у искомого квадратного трёхчлена равен

$$\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = 1$$

(числитель, будучи кососимметричным[1] многочленом от α_1, α_2, α_3, делится на произведение их разностей, частное имеет степень нуль, т. е. является константой, и равно 1, так как лексикографически старшие мономы числителя и знаменателя оба равны $-\alpha_1^2\alpha_2$). Коэффициент при x, с учётом соотношения (3), равен

$$-\frac{q}{\Delta}\big((\alpha_2-\alpha_1)-(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_2-\alpha_1)\big) = 0\,.$$

Наконец, свободный член равен

$$\frac{\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = p$$

[1] То есть зануляющимся и при $\alpha_3 = \alpha_2$, и при $\alpha_3 = \alpha_1$, и при $\alpha_2 = \alpha_1$.

(частное — однородный симметрический многочлен степени 2 со старшим мономом $\alpha_1\alpha_2$ — это левая часть (2)). Итак, искомый многочлен равен $x^2 + p$.

В принципе, до этого ответа вполне возможно догадаться путём некоторого количества удачно сложившихся проб ☺, после чего проверить его явным вычислением. Другой способ — решить систему из трёх линейных уравнений

$$a\alpha_i^2\alpha_j^2 + b\alpha_i\alpha_j + c = \alpha_k^3 + p\alpha_k + q$$

на коэффициенты a, b, c искомого квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, исключая неизвестные из системы при помощи соотношений (1)–(3).

Решение задачи 2 общей части

Ответы: в (а) — да, в (б) — нет. Объяснение к (б): поскольку $e^X e^{-X} = E$, все матрицы вида e^X обратимы, а матрица в (б) имеет нулевой определитель.

Напротив, матрица в (а) имеет характеристический многочлен

$$t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1)$$

с двукратным корнем $t = -1$ и простым корнем $t = 1$. Комплексная аналитическая функция $\ln t$ имеет ветвь, определённую в окрестностях обеих точек $t = \pm 1$ и принимающую в этих точках значения $\ln 1 = 0$ и $\ln(-1) = \pi i$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Поэтому определён

$$\ln\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix}^2 + b\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где константы a, b, c таковы, что квадратный трёхчлен $p(t) = at^2 + bt + c$ имеет в точках $t = 1$ и $t = -1$ те же разложения Тейлора вплоть до, соответственно, нулевого и первого порядков включительно, что и выбранная нами ветвь логарифма, т. е.

$$p(1) = \ln(1) = 0\,, \quad p(-1) = \ln(-1) = \pi i\,, \quad p'(-1) = \ln'(-1) = -1\,.$$

Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты a, b, c:

$$a+b+c=0\,, \quad a-b+c=\pi i\,, \quad -2a+b=-1\,,$$

решая которую[1], получаем $a = (2-\pi i)/4$, $b = -\pi i/2$, $c = (-2+3\pi i)/4$ и

$$X = \ln\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} = \frac{2-\pi i}{4}\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix} - \frac{2\pi i}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} + \frac{-2+3\pi i}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1+\pi i & -2 & -1\\ -\pi i & 2\pi i & \pi i\\ 1+2\pi i & -2-2\pi i & -1-\pi i\end{pmatrix}.$$

[1] Например, по правилу Крамера.

Решение задачи 3 общей части

Ответ: 7. Обозначим через F_n событие, состоящее в том, что при n-м броске впервые выпадает то же число очков, что и при предыдущем броске, через p — вероятность выпадания при очередном броске именно того числа очков, что выпало при предыдущем броске, а через $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события. Тогда

$$p = 1/6\,, \quad q = 5/6\,, \quad \mathbb{P}(F_n) = q^{n-2}p$$

(на 2-м, 3-м, … , $(n-1)$-м бросках выпадает не то, что на предыдущем броске, а на n-м броске — то же, что и на $(n-1)$-м). Искомое математическое ожидание равно

$$\sum_{n\geqslant 2} n \cdot \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n\geqslant 2} nq^{n-2}p = \frac{p}{q}\sum_{n\geqslant 2} nq^{n-1} = \frac{p}{q}\Bigl(-1 + \frac{d}{dq}(1-q)^{-1}\Bigr) =$$
$$= \frac{p}{q}\left(-1 + (1-q)^{-2}\right) = \frac{p}{1-p}\left(p^{-2} - 1\right) = p^{-1} + 1 = 7\,.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что функция $(1-z)^{-1} = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ аналитична в круге $|z| < 1$, и её производная $(1-z)^{-2} = \dfrac{d}{dz}(1-z)^{-1} = \sum\limits_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$.

Решение задачи 4 общей части

Ответ: $\sqrt{2}/4$. Пусть в момент времени t суслик находится в точке $s = s(t) = (t, 0)$, а акула — в точке $a = a(t) = (x(t), y(t))$, где $y = (1+x)^{-1}$. Вектор скорости акулы равен

$$v(t) = \left(x'_t, y'_t\right) = \left(x'_t, y'_x \cdot x'_t\right) = \left(1, -(1+x)^{-2}\right) \cdot x'_t\,. \tag{4}$$

Поскольку a является ближайшей к s точкой графика, вектор

$$\overrightarrow{sa} = \left(x - t, (1+x)^{-1}\right)$$

перпендикулярен вектору $\left(1, -(1+x)^{-2}\right)$, направленному вдоль проходящей через точку a касательной к графику функции $y = (1+x)^{-1}$. Поэтому скалярное произведение этих векторов $x - t - (1+x)^{-3} = 0$, откуда $t = x - (1+x)^{-3}$. По формуле для производной обратной функции $x'_t = 1/t'_x = \left(1 + 3(1+x)^{-4}\right)^{-1}$. Подставляя это в (4) и полагая $x = 0$, получаем $v(t)\,\big|_{x=0} = (1, -1)/4$.

Решение задачи 5 общей части

Ответ: $F(x) = \pi e^{-x^2}/2|x|$. По признаку сравнения интеграл абсолютно сходится при $x \neq 0$ и расходится при $x = 0$. В силу чётности подынтегрального выражения по x функция $F(x)$ тоже чётна, и достаточно вычислить её только для $x > 0$. Пользуясь чётностью подынтегрального выражения по t, перепишем F в виде

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^2 + x^2}\,dt.$$

Обозначим через $C_R \subset \mathbb{C}$ проходимую против часовой стрелки границу полукруга радиуса R с центром в нуле, лежащего в верхней комплексной полуплоскости и имеющего своим основанием вещественный отрезок $[-R, R]$. Несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^2 + x^2}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2}\, dz\,,$$

поскольку $1/|z^2 + x^2| < 1/|z|^2 \to 0$ равномерно по z при $|z| \to \infty$, и стало быть, вклад от интеграла по полукружности тоже стремится к нулю при $R \to \infty$ по лемме Жордана. Контурный интеграл вычисляется при помощи вычетов. При $R > x > 0$ подынтегральная функция мероморфна в рассматриваемом полукруге, и её особенности исчерпываются единственным простым полюсом в точке ix. Поэтому при $R > x > 0$

$$\oint_{C_R} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ix} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2} = 2\pi i\, \frac{e^{-x^2}}{2ix} = \frac{\pi e^{-x^2}}{x}\,.$$

Решение задачи 6 части «Математика»

Ответы: в (а) — нет, в (б) — да. По теореме Жордана, петля $C \subset \mathbb{R}^2$, являющаяся образом непрерывного вложения $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость, всегда разбивает плоскость на компоненты в том смысле, что пространство $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ не является линейно связным. Очевидно, что теорема Жордана остаётся верной и после удаления из $\mathbb{R}^2$ любого конечного множества точек. Поскольку сфера без точки гомеоморфна[1] $\mathbb{R}^2$, теорема Жордана остаётся верной при замене $\mathbb{R}^2$ на сферу с тремя выколотыми точками. Если бы последняя была гомеоморфна тору с выколотой точкой, то теорема Жордана была бы верна и для тора. Но это не так: на торе есть петли[2], при удалении которых получается пространство, гомеоморфное цилиндру, а он линейно связен. Это доказывает (а).

Что касается (б), то оба пространства гомотопически эквивалентны букету из двух окружностей. В самом деле, тор с выколотой точкой получается из квадрата с выколотой внутренней точкой отождествлением каждой из двух пар противоположных сторон в один отрезок с сохранением ориентации. Квадрат с выколотой внутренней точкой стягивается на свой внешний контур $\square$ так, что все точки контура остаются на месте в процессе гомотопии. В результате последующей склейки противоположных рёбер этого контура получится пара окружностей с одной общей точкой, в которую перейдут все четыре вершины квадрата. Сфера с тремя выколотыми точками стягивается на диск с двумя выколотыми внутренними точками, который в свою очередь стягивается на граф θ, а этот граф — на букет двух окружностей (стягиванием горизонтальной перемычки в точку).

Решение задачи 7 части «Математика»

Ответ в обоих случаях — нет. Так как $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, нетривиальный гомоморфизм из S_4 в группу нечётного порядка должен иметь ядром нормальную подгруппу

[1] Например, при помощи стереографической проекции из выколотой точки.

[2] Например, экватор или меридиан.

порядка 8, но нетривиальные нормальные подгруппы в S_4 исчерпываются[1] знакопеременной подгруппой порядка 12 и подгруппой Клейна, имеющей порядок 4.

Вложение $S_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ задавало бы двумерное эффективное[2] линейное представление группы S_4. Такое представление либо неприводимо, либо является прямой суммой двух одномерных. Но двумерное неприводимое представление S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ и имеет ядром группу Клейна, а оба одномерных представления содержат в ядре знакопеременную подгруппу $A_4 \subset S_4$. Таким образом, любое двумерное линейное представление S_4 обязано иметь нетривиальное ядро.

Решение задачи 8 части «Математическая физика»

Задачу проще всего решить при помощи законов сохранения импульса и энергии в системе отсчёта, связанной с центром масс кольца и точечного заряда. Пусть в лабораторной системе отсчёта искомая минимальная скорость точечного заряда вдоль оси ℓ равна v_0. Тогда в системе центра масс начальные скорости кольца и точечного заряда равны, соответственно,

$$v_1 = -\frac{mv_0}{M+m} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{Mv_0}{M+m}\,, \tag{5}$$

так как полный импульс в этой системе равен нулю. Помимо кинетической энергии, в начальный момент времени система обладает потенциальной энергией электростатического взаимодействия

$$W = -\varkappa q^2/L\,, \quad \text{где} \quad L = \sqrt{R^2+a^2}\,,$$

а коэффициент $\varkappa$ зависит от выбора единиц измерения[3]. Когда кольцо и точечный заряд расходятся на большое расстояние, энергия электростатического взаимодействия становится пренебрежимо малой, и у системы остаётся только кинетическая энергия. Если скорость v_0, позволяющая компонентам системы разойтись сколь угодно далеко, выбрана минимальной, то на бесконечно большом удалении друг от друга кольцо и точечный заряд будут иметь в системе центра масс нулевые предельные скорости и нулевую кинетическую энергию. Таким образом, при минимальном v_0 закон сохранения энергии имеет вид[4]

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\varkappa q^2}{L} = 0\,.$$

Подставляя сюда значения скоростей из формулы (5), получаем

$$v_0^2 = \frac{2\varkappa q^2(M+m)}{LMm}\,. \tag{6}$$

[1] Один из (многих) способов в этом убедиться таков: каждая нормальная подгруппа является объединением классов сопряжённости, коих в S_4 имеется пять: тождественная перестановка, 3 пары независимых транспозиций, 8 циклов длины 3 и по 6 циклов длины 4 и длины 2, так что число элементов в нормальной подгруппе может быть равно только $1+3\varepsilon_1+8\varepsilon_2+6\varepsilon_3+6\varepsilon_4$, где каждый ε_i равен 0 или 1, и вдобавок должно делить 24.

[2] То есть с тривиальным ядром.

[3] В принятой в теоретической физике системе СГСЭ $\varkappa = 1$.

[4] В левой части написана начальная энергия, в правой — предельное значение полной энергии при бесконечном удалении тела от кольца.

Отметим, что направление скорости не имеет значения — точечный заряд можно запустить как в сторону кольца, так и от него. Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что в системе центра масс кольцо в пределе покоится. Поэтому в лабораторной системе оно будет двигаться со скоростью центра масс в том же направлении, что и точечный заряд. Таким образом, предельная скорость кольца равна

$$\frac{mv_0}{M+m} = \sqrt{\frac{2m\varkappa q^2}{LM(M+m)}}\,. \tag{7}$$

Можно решать задачу и в лабораторной системе отсчёта: обозначить через u_1 и u_2 предельные скорости кольца и заряда при их бесконечном удалении друг от друга, записать законы сохранения полных импульса и энергии

$$mv_0 = Mu_1 + mu_2, \quad mv_0^2 + 2W = Mu_1^2 + mu_2^2\,,$$

выразить из первого уравнения u_2, подставить во второе и получить на скорость u_1 квадратное уравнение $M(M+m)\,u_1^2 - 2Mmv_0\,u_1 - 2mW = 0$, дискриминант которого

$$D/4 = M^2m^2v_0^2 + 2W\,Mm(M+m)$$

при малых v_0 отрицателен, так как $W < 0$. Минимальное значение v_0, при котором уравнение имеет решение, возникает при $D = 0$, что даёт для v_0^2 значение (6). Единственный корень уравнения при этом равен (7). Отметим, что при бóльших значениях v_0 физический смысл имеет только тот из двух корней u_1, который стремится к нулю при $W \to 0$. Соответствующее ему значение $u_2 \to v_0$. Физически такому предельному переходу отвечает ослабление электростатического взаимодействия.

Решение задачи 9 части «Математическая физика»

Ответ: $2\sqrt{s/(g\sin\alpha)}$. Приведём решение, основанное на законах Ньютона. Направим ось Ox инерциальной системы отсчёта вдоль наклонной плоскости вниз, а ось Oy — перпендикулярно этой плоскости вверх (так что ускорение свободного падения имеет отрицательную проекцию на ось Oy). На цилиндр действуют три силы: сила тяжести Mg, приложенная к его центру масс, сила реакции поверхности N, приложенная в точке касания цилиндра с наклонной плоскостью и направленная вдоль оси Oy, а также приложенная к этой же точке сила трения F, направленная против оси Ox. Движение цилиндра определяется уравнением на движение центра масс и уравнением, описывающем вращение цилиндра вокруг центра масс. Обозначим ускорение центра масс через a, угловое ускорение вращения вокруг центра масс через γ, а момент инерции цилиндра относительно оси вращения через J. Проекция второго закона Ньютона $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + M\vec{g}$ на ось Ox имеет вид

$$Ma = Mg\sin\alpha - F\,. \tag{8}$$

Так как по условию ось цилиндра перемещается параллельно самой себе, векторы моментов всех сил параллельны оси вращения, и моменты сил N и Mg равны нулю. Поэтому второе уравнение, связывающее моменты сил и угловое ускорение, скалярно и имеет вид $J\gamma = FR$. Для однородного тонкостенного цилиндра $J = MR^2$, и

$a = \gamma R$, так как нет проскальзывания. Тем самым, $F = J\gamma / R = \gamma M R = M a$. Подставляя это в (8), находим абсолютную величину ускорения центра масс цилиндра

$$a = \frac{1}{2}\, g \sin\alpha\,.$$

При равноускоренном движении путь s из состояния покоя проходится за время

$$\sqrt{\frac{2s}{a}} = 2\sqrt{\frac{s}{g\sin\alpha}}\,.$$

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Приводимые ниже задачи разнятся по своему уровню, и некоторые из них значительно труднее тех, что в среднем предлагаются на вступительном экзамене на магистерские программы «Математика» и «Математика и математическая физика». Решение этих задач позволит вам, с одной стороны, уверенно и даже с некоторым запасом подготовиться к вступительным испытаниям на факультет, а с другой стороны, даст возможность почувствовать дух того, что ждёт на реальном экзамене — предложенные там задачи будут, скорее всего, немного попроще, но не менее интересны и столь же нестандартны по своим формулировкам.

Задачи итогового экзамена бакалавриата Факультета математики имеют примерно тот же уровень сложности, что и данные вступительный экзамен и охватывают (среди прочего) все его темы: https://www.hse.ru/ba/math/final_exam

Задача 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечётной суммой цифр.

Задача 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n-угольника.

Задача 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность его попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

Задача 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

Задача 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

Задача 6. Для перестановки $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$ вычислите σ^{2018}.

Задача 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 8. Найдите порядки групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ над q-элементным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 9. Можно ли вложить поле из девяти элементов в поле из двадцати семи элементов?

Задача 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Задача 11. Максимален ли идеал, порождённый элементом x в кольце
а) $\mathbb{C}[x]$ в) $\mathbb{C}[[x]]$ г) $\mathbb{Z}[[x]]$?

Задача 12. Приводим ли над полем $\mathbb{Q}$ многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ в) $x^4 + 4$?

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

Задача 14. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена x^3+x^2-2x-1.

Задача 15. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

Задача 16. Конечно ли множество различных вложений поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$?

Задача 17. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в $\mathbb{R}^2$ и многочленов второй степени f_1, f_2, f_3, $f_4 \in \mathbb{R}[x,y]$ определитель 4×4 матрицы $\det(f_i(p_j)) = 0$.

Задача 18. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для а) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$
в) $\chi(t) = (t^6-1)$, $\mu(t) = (t^3-1)$ г) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$?
Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

Задача 19. Найдите минимальный многочлен квадратной $n\times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Всякое ли открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счётного семейства замкнутых множеств?

Задача 21. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A\times B \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 22. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \to C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

Задача 23. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное[1] отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Задача 24. Существует ли такая непрерывная сюрьекция $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0,1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной[2]?

Задача 25. С точностью до $0{,}01$ вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Задача 26. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0,1]$, что $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 27. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

Задача 28. Докажите, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 29. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полу-

[1] Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

[2] В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связен.

ченного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

Задача 30. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \smallsetminus X$, где X является объединением оси z, точки $(3, 3, 0)$ и единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y?

Задача 31. Существуют ли такие гладкие функции $f_1,\ f_2,\ f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, причём дифференциалы функций $f_1,\ f_2,\ f_3$ линейно независимы в каждой точке множества X?

Задача 32. Вычислите $\displaystyle\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Задача 33. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\, dx_1 \dots dx_n$ для положительно определённой квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$ матрица, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 34. Для произвольно заданных комплексных матриц A, B размера $n{\times}n$ вычислите значение при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f / \partial x \partial y$ от матричнозначной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

Задача 35. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leqslant 1$ функции f равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\, dx = \int\limits_{|z|=1} f(z) \ln(z)\, dz\,,$$

где слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, а справа — по единичной окружности, обходимой один раз против часовой стрелки, начиная с точки $1 \in \mathbb{C}$, и логарифм действителен на положительной полуоси вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задача 36. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

Задача 37. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2}\, dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 38. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

Задача 39. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости[1].

Задача 40. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

на полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

Задача 41. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

[1] Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной