

МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «MATHEMATICS»

MASTER OF SCIENCE PROGRAMME «MATHEMATICS»

СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

ИНФОРМАЦИЯ НА РУССКОМ	2
ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ	2
ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТМАТИКЕ	2
РЕКОМЕНДУЕМЫЕ УЧЕБНИКИ НА РУССКОМ	3
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ	4
INFORMATION IN ENGLISH	7
ADMISSION	7
PROGRAM OF MATH EXAM	7
RECOMMENDED TEXTBOOKS IN ENGLISH	8
PROBLEMS FOR PREPARATION TO THE MATH EXAM	8

ИНФОРМАЦИЯ НА РУССКОМ

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Зачисление на программу «Mathematics» происходит по конкурсу на основании результатов вступительных испытаний, которые состоят из письменного экзамена по математике и квалификационного теста по английскому языку.

Тест по английскому оценивается как «сданный» или «не сданный». К вступительному конкурсу допускаются только абитуриенты сдавшие тест, и в этом случае результат теста не влияет на дальнейшее прохождение конкурса.

Экзамен по математике состоит в решении семи задач и длится 300 минут. Во время экзамена запрещается пользоваться любыми устройствами хранения и передачи информации¹, кроме ручки и выданной экзаменаторами бумаги. Решение каждой задачи оценивается определённым числом баллов, указанным в условии задачи. Максимально возможный результат за экзамен составляет 100 баллов². К вступительному конкурсу допускаются только абитуриенты, набравшие не менее 31 балла. Участники конкурса упорядочиваются по убыванию числа набранных за решённые задачи баллов.

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

От поступающих предполагается владение следующими темами:

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).
- Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов.
- Группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Примеры групп: симметрические и знакопеременные группы, группы симметрий геометрических фигур, матричные группы, группы вычетов.
- Кольца, идеалы, фактор кольца. Китайская теорема об остатках. Евклидовы кольца, факториальность. Обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Примеры колец: кольца матриц, кольца многочленов и степенных рядов, кольца вычетов, гауссовы целые числа.
- Поля, гомоморфизмы полей, характеристика. Простые расширения полей. Поле комплексных чисел. Описание и примеры конечных полей.
- Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность. Решение систем линейных уравнений. Жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены матрицы. Билинейные и квадратичные формы, индекс вещественной квадратичной формы.

¹Включая письменные источники на бумаге, калькуляторы, мобильные средства связи и т. п.

²В случае, если правильное решение всех семи задач позволяет набрать большую, чем 100 баллов сумму, итоговый результат при наборе более 100 баллов всё равно считается равным 100 баллам.

- Аффинные и проективные пространства. Аффинные и проективные отображения. Плоские кривые второго порядка (коники).
- Открытые, замкнутые и компактные подмножества в \mathbb{R}^n , всюду плотные и нигде не плотные множества. Топологические пространства: компактность, связность, внутренность и замыкание. Непрерывные отображения, равномерная непрерывность, равномерная сходимость. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
- Накрытия, гомотопии, триангуляции, фундаментальная группа.
- Производная и дифференциал отображения $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, теорема о производной сложной функции. Ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.
- Мера и интеграл Лебега в \mathbb{R}^n . Теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
- Комплексная производная функции $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, голоморфные функции. Интеграл Коши, теорема о вычетах. Лемма Шварца.
- Теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Решение уравнений с разделяющимися переменными, линейных уравнений первого и второго порядков, однородных уравнений. Уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ УЧЕБНИКИ НА РУССКОМ

- В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД 2000.
- В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис 1999.
- Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.
- О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ 2007.
- И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.
- А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
<http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf>,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.
- В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007
- А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.
- В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.
- Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧА 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечетной суммой цифр.

ЗАДАЧА 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n -угольника.

ЗАДАЧА 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

ЗАДАЧА 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

ЗАДАЧА 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

ЗАДАЧА 6. Для перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ вычислите σ^{2018} .

ЗАДАЧА 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

ЗАДАЧА 8. Найдите порядки групп $GL_n(\mathbb{F}_q)$ и $SL_n(\mathbb{F}_q)$ над q -элементным полем \mathbb{F}_q .

ЗАДАЧА 9. Есть ли в поле из восьми элементов подполе из четырех элементов?

ЗАДАЧА 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

ЗАДАЧА 11. Максимален ли идеал, порожденный элементом x в кольце

а) $\mathbb{C}[x]$ б) $\mathbb{C}[[x]]$ в) $\mathbb{Z}[[x]]$?

ЗАДАЧА 12. Является ли 2 а) простым б) неприводимым элементом кольца

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}?$$

ЗАДАЧА 13. Приводим ли над полем \mathbb{Q} многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ б) $x^4 + 4$?

ЗАДАЧА 14. Сколько решений имеет уравнение $xuz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

ЗАДАЧА 15. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

ЗАДАЧА 16. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

ЗАДАЧА 17. Конечно ли множество различных вложений поля \mathbb{R} в поле \mathbb{C} ?

ЗАДАЧА 18. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный 14-угольник?

ЗАДАЧА 19. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для

а) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$

б) $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$, $\mu(t) = (t - 1)(t - 2)$

в) $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5$, $\mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$?

Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

ЗАДАЧА 20. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 21. Докажите, что всякое открытое подмножество в \mathbb{R}^n представляется в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

ЗАДАЧА 22. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A \times B \subset \mathbb{R}^2$?

ЗАДАЧА 23. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \rightarrow C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

ЗАДАЧА 24. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное¹ отображение $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

ЗАДАЧА 25. С точностью до 0,01 вычислите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

ЗАДАЧА 26. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полученного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

ЗАДАЧА 27. Существует ли такая непрерывная сюръекция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0, 1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной²?

ЗАДАЧА 28. Докажите, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех по мере Лебега значений $x \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 29. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \setminus X$, где X является объединением оси z , точки $(3, 3, 0)$ и единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y ?

ЗАДАЧА 30. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

ЗАДАЧА 31. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0, 1]$, что $\int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$.

ЗАДАЧА 32. Для произвольно заданных комплексных $n \times n$ матриц A, B вычислите значение

¹Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

²В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связан.

при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f / \partial x \partial y$ матрично значной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

ЗАДАЧА 33. Пусть для почти всюду¹ дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ почти везде выполняется равенство $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$?

ЗАДАЧА 34. Вычислите $\int \max(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n$, в \mathbb{R}^n .

ЗАДАЧА 35. Существуют ли такие гладкие функции $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости и дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы в каждой точке множества X ?

ЗАДАЧА 36. Вычислите интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx_1 \dots dx_n$ для положительно определенной квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$ матрица и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА 37. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leq 1$ функции f равенство²

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{|z|=1} f(z) \ln(z) dz.$$

ЗАДАЧА 38. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

ЗАДАЧА 39. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz/f(z)$ по всем комплексным корням многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$ равна нулю, если $\deg f \geq 2$. Верно ли это, когда $\deg f = 1$?

ЗАДАЧА 40. Вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА 41. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в \mathbb{R}^2 и многочленов второй степени $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ определитель 4×4 матрицы $\det(f_i(p_j)) = 0$.

ЗАДАЧА 42. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

ЗАДАЧА 43. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости³.

ЗАДАЧА 44. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{q} = f(q, \varphi, \dot{q}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(q, \varphi, \dot{q}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

¹По мере Лебега.

²Слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, справа — по единичной окружности, которая обходится один раз против часовой стрелки, начиная из точки $z = 1$, а логарифм действителен на положительной полуоси действительной прямой.

³Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной

на полярные координаты в плоскости \mathbb{R}^2 , решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

ЗАДАЧА 45. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

INFORMATION IN ENGLISH

ADMISSION

Admission tests for the Master of Science programme «Mathematics» include a written exam in Mathematics and a qualifying English language test.

The results of English language test are accounted for as pass or fail only, and is not used for ranking those candidates who pass the test.

The Mathematics exam last 300 minutes and consists of solving seven problems. Only pen and paper provided by examiners can be used during the exam, no other tools for data storage or transmission are allowed¹. The problems can be solved in any order, the contribution of every problem to the final mark is indicated in the formulation of problem. The maximal exam mark is 100 points². The lowest passing grade for the exam in Mathematics is 31 points. The candidates passing the exam are ranged in decreasing order of the result.

PROGRAM OF THE MATHEMATICS EXAM

All candidates are supposed to be holding the following subjects:

- Basics of combinatorics (combinations, permutations) and probability theory (independence, conditional probabilities).
- Limits of sequences and limits of functions, convergence of series.
- Groups, subgroups, cosets, homomorphisms of groups, quotient groups. Classification of finitely generated commutative groups. Basic examples of groups: symmetric and alternating groups, symmetry groups of figures, matrix groups, groups of residues.
- Rings, homomorphisms of rings, ideals, quotient rings. The Chinese Remainder Theorem. Euclidean rings, unique factorization property. Invertible, prime and irreducible elements, prime and maximal ideals. Basic examples of rings: matrix rings, polynomials and formal power series, residues, Gaussian integers.

¹Including written or printed matter, calculators, mobile phones etc.

²It may be possible to collect more than 100 points by solving all the problems. In this case the exam mark is declared to be 100 points.

- Fields, homomorphisms of fields, characteristics. Simple field extensions. The field of complex numbers. Description and examples of finite fields.
- Vector spaces and linear maps, bases, dimension. Solution of systems of linear equations. The Jordan normal form, characteristic and minimal polynomials of matrix. Bilinear and quadratic forms, the index of real quadratic form.
- Affine and projective spaces. Affine and projective maps. Plane curves of degree two (conics).
- Open, closed, and compact subsets of \mathbb{R}^n , dense and nowhere dense sets. Topological spaces, compactness, connectivity, interior and closure. Continuous maps, uniform continuity, uniform convergence. The Intermediate Value Theorem.
- Coverings, homotopies, triangulations, the fundamental group.
- The differential of mapping $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, the Chain Rule. The Taylor series. Methods of finite-dimensional optimization, Lagrange multipliers.
- The Lebesgue measure and integral in \mathbb{R}^n . The Fubini theorem. Computations of arc lengths and surface areas by means of integrals.
- The complex derivative of function $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphic functions. The Cauchy integral, the Residue Theorem. The Schwartz lemma.
- The existence and uniqueness theorem for ordinary differential equation. Solution of ODEs with separable variables, of linear first and second order ODEs, of homogeneous ODEs. First order partial differential equations, the method of characteristics.

RECOMMENDED TEXTBOOKS IN ENGLISH

V. Arnold, *Ordinary differential equations*, Springer 2006.

M. Artin, *Algebra*, Addison Wesley 2010.

A. L. Gorodentsev, *Algebra I, II. Textbook for Students of Mathematics*, Springer 2016, 2017.

I. Kaplansky, *Linear algebra and geometry*, Dover Publications 2003.

J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall 2000.

W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill 1986

PRACTICE PROBLEMS FOR PREPARATION TO THE MATH ENTRANCE EXAM

PROBLEM 1. How many 9-digit numbers have an odd sum of digits?

PROBLEM 2. Mr. Crookedarm, the famous basketball player, makes a series of 100 shots. When shooting the first ball, he makes it to the basket; when shooting the second, he misses. For all subsequent shots, the probability of a success is the number of previous successful shots divided by

the number of all shots already made. What is the probability that he misses the basket exactly 50 times?

PROBLEM 3. Find the maximal possible number of intersection points between the diagonals of a convex n -gon on the plane.

PROBLEM 4. For the permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$, compute σ^{2018} .

PROBLEM 5. How many elements of the symmetric group S_n are represented as a product of two different transpositions?

PROBLEM 6. Can a group split in a union of two subgroups other than the identity and the whole group?

PROBLEM 7. How many automorphisms does the abelian group $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ have?

PROBLEM 8. Find the orders of matrix groups (A) $GL_n(\mathbb{F}_q)$ (B) $SL_n(\mathbb{F}_q)$ over the field \mathbb{F}_q of q elements.

PROBLEM 9. Does the field of eight elements contain a subfield of four elements?

PROBLEM 10. Find all invertible elements in the ring of Gaussian integers

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

PROBLEM 11. Consider the ideal (x) generated by the variable x in the ring (A) $\mathbb{C}[x]$ (B) $\mathbb{C}[[x]]$ (C) $\mathbb{Z}[[x]]$. Is it maximal?

PROBLEM 12. Is the element 2 (A) prime (B) irreducible in the commutative ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}?$$

PROBLEM 13. Is the polynomial (A) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ (B) $x^4 + 4$ irreducible over the field \mathbb{Q} ?

PROBLEM 14. How many positive integer solutions has the equation $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

PROBLEM 15. Is the set of different embeddings of fields $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ finite?

PROBLEM 16. Is it possible to construct a regular 14-gon by means of a straightedge and a compass?

PROBLEM 17. Find a cubic polynomial with integer coefficients, whose roots are squares of the roots of polynomial $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

PROBLEM 18. Compute the product of all mutual differences between the complex n -th degree roots of unity.

PROBLEM 19. Does there exist a matrix, whose characteristic polynomial $\chi(t)$ and minimal polynomial $\mu(t)$ are:

- (A) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$
- (B) $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$, $\mu(t) = (t - 1)(t - 2)$
- (C) $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5$, $\mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$?

PROBLEM 20. Find the minimal polynomial of the square $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

PROBLEM 21. Prove that every open set in \mathbb{R}^n is a union of countable family of closed sets.

PROBLEM 22. For two sets $A, B \subset \mathbb{R}$, is the closeness of $A \times B$ in \mathbb{R}^2 equivalent to the closeness of both sets in \mathbb{R} ?

PROBLEM 23. For an arbitrary closed subset $C \subset \mathbb{R}^n$, does there exist a sequence $x : \mathbb{N} \rightarrow C$ such that every point of C is a partial limit of this sequence?

PROBLEM 24. Prove that every polynomial $f \in \mathbb{C}[z]$ of positive degree produces the proper¹ map $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

PROBLEM 25. Does there exist a continuous surjection $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ such that the full preimage $f^{-1}(x)$ of every $x \in [0, 1]$ is bounded? Can such a function be monotonous²?

PROBLEM 26. Evaluate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ with two right decimal digits.

PROBLEM 27. For almost all $x \in \mathbb{R}$ with respect to the Lebesgue measure, prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) = 1.$$

PROBLEM 28. Is it possible to write every continuous differentiable function $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as a difference of two continuous strictly increasing functions?

PROBLEM 29. Does there exist an element of infinite order in the fundamental group of $\mathbb{R}^3 \setminus X$, where X is a union of the z -axis, the point $(3, 3, 0)$, and the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ within the x, y -plane?

PROBLEM 30. Find the fundamental group of the topological space obtained from $2D$ torus by identifying two different points on it.

PROBLEM 31. Prove that for any integrable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, there exist a number $t \in [0, 1]$ such

$$\text{that } \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx.$$

PROBLEM 32. For a given pair of complex $n \times n$ matrices A, B , evaluate the mixed partial derivative $\partial^2 f / \partial x \partial y$ of the matrix-valued function $f(x, y) = e^{xA+yB}$ at $x = y = 0$.

PROBLEM 33. Let a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be differentiable and have $f'(x) = 1$ almost everywhere³. Does this imply that $f(1) - f(0) = 1$? If not, give an explicit counterexample.

PROBLEM 34. Evaluate the following integral over the unit cube $0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n$, in \mathbb{R}^n :

$$\int \max(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

¹I.e., such that the full preimage of every compact is compact.

²In the sense that the preimage of every connected set is connected.

³In the sense of the Lebesgue measure.

PROBLEM 35. Does there exist a triple of smooth functions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ such that the set $X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ is homeomorphic to the real projective plane and the differentials df_1, df_2, df_3 are linearly independent at every point of X ?

PROBLEM 36. Evaluate the integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx_1 \dots dx_n$ for a positive definite quadratic form $q(x) = xAx^t$, where $A = A^t$ is a real symmetric $n \times n$ matrix, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

PROBLEM 37. For a complex function f holomorphic in the disc $|z| \leq 1$, prove the equality¹

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{|z|=1} f(z) \ln(z) dz.$$

PROBLEM 38. All roots of a complex polynomial have positive imaginary part. Prove that all roots of its derivative also have positive imaginary part.

PROBLEM 39. For a polynomial $f \in \mathbb{C}[z]$ of degree $\deg f \geq 2$, prove that the sum of residues of the 1-form $dz/f(z)$ over all complex roots of f equals zero. Is this true, when $\deg f = 1$?

PROBLEM 40. Evaluate the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx$, where $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEM 41. For a quadruple of collinear points $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$ and quadratic polynomials $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ show that 4×4 determinant $\det(f_i(p_j)) = 0$.

PROBLEM 42. Are there on euclidean plane \mathbb{R}^2 a circle and parabola having exactly two intersection points, one of which being a point of tangency, and the other a transversal intersection?

PROBLEM 43. Write a differential equation satisfied by all circles² in the plane.

PROBLEM 44. Write a system of second order differential equations on the polar coordinates in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}), \end{cases}$$

whose solutions in the Cartesian coordinates (x, y) have the form $x = at + b$, $y = ct + d$, where a, b, c, d are arbitrary real constants.

PROBLEM 45. Compute the derivative of the solution of differential equation

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

subject to the initial condition $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ by the parameter θ for $\theta = 0$.

¹In the left hand side, the integration is performed over the straight segment $[0, 1]$ of real axis, in the right hand side over the unit circle traversed once in the counterclockwise direction starting at 1. The chosen branch of logarithm takes real values on the positive ray o the real line.

²Viewed locally, near points with non-vertical tangent lines, as graphs of one-variable functions.