

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2017 г.
Демонстрационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Исследовать функцию (найти область определения, особенности, экстремумы, участки монотонности, интервалы выпуклости вверх и вниз, асимптоты.) и построить ее график

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$$

2. Вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$$

3. При каких натуральных n число $9^{2n+1} + 8^{n+2}$ нацело делится на 73.

4. Решите систему дифференциальных уравнений (\dot{x} означает dx/dt и т.д.)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases} .$$

5. Найти матрицу A_{BC} линейного оператора $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ заданного следующим образом

$$L((x, y, z)) = (3y + 2z, 4x - 7y)$$

в базисах

$$B = \{(-5, -3, -2), (3, 0, 1), (5, 2, 2)\}, \quad C = \{(4, 3), (-3, -2)\}$$

6. Ниже представлен псевдокод некоторой функции:

somefunction = function(K,M):

 X = 8

 Y = 1

 While (X > K)

 If (X Mod 4 = 1)

 Y = Y - somefunction(X,M)

 Else

 If (M < 1)

 M = 2*M

 End If

 End If

 X = X - 1

 End While

 Return (Y+M);

Какое значение вернет somefunction(1, 0.5)?

7. Даны две корзины. В первой находятся 3 синих, 4 красных и 2 зеленых шара. Вторая корзина пуста. Из первой корзины случайным образом достается шар (все шары неразличимы)

- Если был вытащен красный шар, то его возвращают обратно в первую корзину. После чего из первой корзины случайным образом достается шар и кладется во вторую корзину.
- Если был вытащен синий или зеленый шар, то он кладется во вторую корзину.

Какова вероятность того, что первым вытащенным из первой корзины был красный шар, если во второй корзине оказался шар синего цвета?

8. Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ ($a, b, c \neq 0$) имеют общий корень. Найдите его.

9. В межгалактической маршрутке летят четыре инопланетянина. Те, у кого 7 ног, всегда лгут. Те, у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Первый сказал: "Вместе у нас 28 ног". Второй сказал: "Вместе у нас 27 ног". Третий сказал: "Вместе у нас 26 ног". Четвертый сказал: "Вместе у нас 25 ног". У кого сколько ног?

10. Один из залов заседаний в думе имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 метра. В каждом углу установлен прибор, определяющий число спящих депутатов на расстоянии, не превышающем 3 метра. Сколько всего в зале спящих депутатов, если сумма показаний приборов равна 7?

11. На экзамене 333 студента допустили в сумме 1000 ошибок. Могло ли оказаться так, что студентов, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось больше, чем студентов, сделавших менее чем по 4 ошибки?

12. Регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_x x_i + \beta_z z_i + \beta_w w_i + u_i$. Исследователь Феофан оценил эту модель по 20 наблюдениям и оказалось, что $R^2 = 0.8$. Феофан хочет проверить гипотезу H_0 о том, что $\beta_x = \beta_z$ и одновременно $\beta_z + \beta_w = 0$. Предположения теоремы Гаусса-Маркова на ошибки u_i выполнены, кроме того, u_i нормально распределены.

1. Какую вспомогательную регрессию достаточно оценить Феофану для проверки H_0 ?
2. Во вспомогательной регрессии оказалось, что $R^2 = 0.7$. Отвергается ли H_0 на 5%-ом уровне значимости?
3. На сколько процентов изменилась несмещённая оценка дисперсии случайной ошибки при переходе ко вспомогательной регрессии?

13. Исследователь Феофан изучает регрессию со 100 наблюдениями и 10 оцениваемыми коэффициентами. Предположения теоремы Гаусса-Маркова на ошибки u_i выполнены, кроме того, u_i нормально распределены.

Феофан хочет оценить неизвестную дисперсию $\sigma^2 = \text{Var}(u_i)$ по формуле $\hat{\sigma}^2 = c \cdot RSS$ так, чтобы величина среднеквадратичной ошибки была минимальной. Какое значение c получит Феофан?

Подсказка: Феофан смутно помнит, что дисперсия χ^2 -распределения с d степенями свободы равна $2d$.

14. На работе Феофан построил парную регрессию по трём наблюдениям и посчитал прогнозы \hat{y}_i . Придя домой он отчасти вспомнил результаты:

y_i	\hat{y}_i
0	1
6	?
6	?

Поднапрягшись, Феофан вспомнил, что третий прогноз был больше второго. Помогите Феофану восстановить пропущенные значения.