

Вступительный экзамен в магистратуру - 2018

Магистерская программа:

«Совместная магистратура ВШЭ и ЦПМ».

Демо-версия. Время выполнения – 300 минут.

Часть 1.

1. Два пешотинца и мотоциклист должны попасть из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 33 км. На мотоцикле можно ездить вдвоем, но нельзя ездить втроем. Вести мотоцикл может только мотоциклист. Скорость мотоцикла равна 25 км/час, а мотоцикла с пассажиром – 20 км/час. Каждый из пешотинцев по дороге идет со скоростью 5 км/час. Докажите, что: а) все трое могут попасть в Б за три часа; б) быстрее, чем за три часа все трое не смогут попасть в Б.

2. Пусть X – неединоточечное подмножество числовой прямой, для которого всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ имеет хотя бы одну неподвижную точку x , т.е. $f(x) = x$. Докажите, что: а) X - выпукло; б) X - отрезок (можно использовать а)).

3. Пусть G - группа из n элементов. Верно ли, что группа G абелева (коммутативна), если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$?

4. Найдите объём параллелепипеда, у которого длины всех ребер равны 1, а плоские углы при одной из его вершин равны α , α и β .

=====

Часть 2.

5. а) Верно ли следующее утверждение?

Ответ обоснуйте.

Если функция убывает на $(-\infty; +\infty)$ и в каждой точке имеет производную, то эта производная всюду отрицательна.

б) Есть ли ошибки в приведенном доказательстве? Ответ обоснуйте.

По определению $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Функция убывает, а $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, т.е. Δf и Δx – противоположны по знаку.

Значит, дробь $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ всегда отрицательна и поэтому отрицательна производная $f'(x)$

6. При решении задачи школьник написал:

$$\log_{2x-1}(x^2-x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2-x) > 0, \\ x > 0,5, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Верна ли эта равносильность? Если нет, то объясните, в чем ошибка. Если верна, приведите обоснование или ссылку на использованный методический прием.

7. Ниже приведено решение неравенства

$$\frac{7}{4^x - 2^x + 7} > \frac{1}{2^x + 1}.$$

Кратко прокомментируйте решение. В своем комментарии укажите ошибки, описки и неточности, если они есть.

Решите неравенство:

$$\frac{7}{4^x - 2^x + 7} > \frac{1}{2^x + 1}$$

\Downarrow

$$7(2^x + 1) > 4^x - 2^x + 7 > 0$$

\Downarrow

$$(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x < 0$$

Пусть $2^x = t$

$$t^2 - 8t < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < t < 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^x < 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < 3$$

Ответ: $x < 3$