Примерный список задач для устной части вступительного экзамена.

1) Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

2) Перед каждым из чисел 6, 7,…,10 и 11,12,…,19 произвольным образом ставят плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

3) В ряд, через запятые, произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

а) Какое наименьшее количество единиц может быть среди выписанных чисел?

б) Какое наибольшее значение может принимать среднее арифметическое всех выписанных чисел?

4) На доске записали произвольный набор чисел, каждое из которых равно или 1, или 2, или 3, или 4, или 5. Среднее арифметическое чисел равно 4,2.

а) Может ли количество «пятерок» составлять 80% количества всех чисел в таком наборе?

б) Может ли количество «пятерок» составлять более 80% количества всех чисел в таком наборе?

в) Каждую «пятерку» удвоили, т.е. заменили парой чисел: 5 и 5. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического нового набора чисел после такой замены.

5) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

6) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

7) Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, …, 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — четвёртое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных семи чисел.

а) Может ли B – A равняться 2/7?

б) Может ли B – A равняться 3/7 ?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности В – А .

8) Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 произвольно делят на три группы (в каждой группе есть хотя бы одно число). Затем вычисляют средние значения чисел в каждой из групп.
а) Могут ли все три средних значения быть одинаковыми?
б) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трех средних значений.
в) То же, что и в б), но для набора 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16?

9) На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

10) На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

11) Семь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.
а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться 1/30?
б) равняться 1/35 ?
в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

12)
Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ состоят из натуральных чисел.
а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1 b_1 + a_3 b_3 = 3a_2 b_2$.
б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1 b_1 + 2a_4 b_4 = 3a_3 b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \le 300$?

13)
Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.
а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.
б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?
в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

14)
Известно, что a, b, c, и d — попарно различные двузначные числа.
а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{19}$?
б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?
в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

15)
В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.
а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?
в) Сколько в роте может быть солдат?

16)
Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.
а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?
б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?
в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

17) Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x| - 6\right)^2 + \left(y - 12\right)^2 = 4, \\ \left(x+1\right)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18) Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3\sin a+5$ и $9\cos 2a-36\sin a-18$ являются решениями неравенства $\dfrac{(25x-3x^2+18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\geq 0$

19) Найдите все значения параметра а, при которых система
$\begin{cases} x^2+20x+y^2-20y+75=|x^2+y^2-25|, \\ 4x-3y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

20) Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

21) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y(y-7)=xy-5(x+2) \\ x\leq 6 \\ \dfrac{y+6a}{x}=a \end{cases}$

имеет единственное решение.

22) Найдите все значения a, при каждом из которых система
$\begin{cases} \dfrac{y^2+4x-7y-xy+12}{\sqrt{4-x}}=0 \\ y=a(x-3) \end{cases}$ имеет единственное решение.

23) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

24) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(\log_6(x+4)-\log_6(x-4)\right)^2-10\left(\log_6(x+4)-\log_6(x-4)\right)-4a^2+4a+24=0$$

имеет ровно два решения.

25) Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=5(30k+11)$.

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$)