национальный иследовательский университет
«высшая школа экономики»

national research university «higher school of economics»

Магистерская программа «Mathematics»

Master of Science Programme «Mathematics»

Содержание / Contents

Москва / Moscow
2018

Информация на русском

Вступительные испытания

Зачисление на программу «Mathematics» происходит по конкурсу на основании результатов вступительных испытаний, которые состоят из письменного экзамена по математике и квалификационного теста по английскому языку.

Тест по английскому оценивается как «сданный» или «не сданный». К вступительному конкурсу допускаются только абитуриенты сдавшие тест, и в этом случае результат теста не влияет на дальнейшее прохождение конкурса.

Экзамен по математике состоит в решении семи задач и длится 300 минут. Вклад в оценку, который даётся за полное решение каждой задачи, указывается в её условии. Полное решение всех семи задач оценивается в 100 баллов. К вступительному конкурсу допускаются только абитуриенты, набравшие более 20 баллов. Участники конкурса упорядочиваются по убыванию числа набранных баллов.

Программа экзамена по матматике

От поступающих предполагается владение следующими темами:

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).
- Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов.
- Группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Примеры групп: симметрические и знакопеременные группы, группы симметрий геометрических фигур, матричные группы, группы вычетов.
- Кольца, идеалы, фактор кольца. Китайская теорема об остатках. Евклидовы кольца, факториальность. Обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Примеры колец: кольца матриц, кольца многочленов и степенных рядов, кольца вычетов, гауссовы целые числа.
- Поля, гомоморфизмы полей, характеристика. Простые расширения полей. Поле комплексных чисел. Описание и примеры конечных полей.
- Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность. Решение систем линейных уравнений. Характеристический и минимальный многочлены матрицы, тождество Гамильтона – Кэли. Жорданова нормальная форма комплексной матрицы. Вычисление аналитических функций от матриц.
- Билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, индекс вещественной квадратичной формы. Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^n$: неравенства треугольника и Коши – Буняковского – Шварца, расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса.

- Аффинные и проективные пространства. Аффинные и проективные отображения. Плоские кривые второго порядка (коники).

- Открытые, замкнутые и компактные подмножества в $\mathbb{R}^n$, всюду плотные и нигде не плотные множества. Топологические пространства: компактность, связность, внутренность и замыкание. Непрерывные отображения, равномерная непрерывность, равномерная сходимость. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.

- Накрытия, гомотопии, триангуляции, фундаментальная группа.

- Производная и дифференциал отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, теорема о производной сложной функции. Ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

- Мера и интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$. Теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

- Комплексная производная функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, голоморфные функции. Интеграл Коши, теорема о вычетах. Лемма Шварца.

- Теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Решение уравнений с разделяющимися переменными, линейных уравнений первого и второго порядков, однородных уравнений. Уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.

Рекомендуемые учебники на русском

В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД 2000.

В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис 1999.

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ 2007.

И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

Задачи для подготовки к экзамену по математике

Задача 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечетной суммой цифр.

Задача 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n-угольника.

Задача 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

Задача 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

Задача 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

Задача 6. Для перестановки $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$ вычислите σ^{2018}.

Задача 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 8. Найдите порядки групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ над q-элементным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 9. Есть ли в поле из восьми элементов подполе из четырех элементов?

Задача 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Задача 11. Максимален ли идеал, порождённый элементом x в кольце
а) $\mathbb{C}[x]$ б) $\mathbb{C}[[x]]$ в) $\mathbb{Z}[[x]]$?

Задача 12. Является ли 2 а) простым б) неприводимым элементом кольца

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\,?$$

Задача 13. Приводим ли над полем $\mathbb{Q}$ многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ б) $x^4 + 4$?

Задача 14. Сколько решений имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

Задача 15. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Задача 16. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

Задача 17. Конечно ли множество различных вложений поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$?

Задача 18. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный 14-угольник?

Задача 19. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для
а) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$
б) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$

в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$?
Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

Задача 20. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 21. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

Задача 22. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A \times B \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 23. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \to C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

Задача 24. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное[1] отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Задача 25. С точностью до $0,01$ вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

Задача 26. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полученного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

Задача 27. Существует ли такая непрерывная сюрьекция $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0,1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной[2]?

Задача 28. Докажите, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех по мере Лебега значений $x \in \mathbb{R}$.

Задача 29. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \smallsetminus X$, где X является объединением оси z, точки $(3,3,0)$ и единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y ?

Задача 30. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

Задача 31. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0,1]$, что $\int\limits_0^t f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 32. Для произвольно заданных комплексных $n \times n$ матриц A, B вычислите значение

[1] Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

[2] В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связен.

при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f/\partial x \partial y$ матрично значной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

Задача 33. Пусть для почти всюду[1] дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ почти всюду выполняется равенство $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$?

Задача 34. Вычислите $\displaystyle\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в $\mathbb{R}^n$.

Задача 35. Существуют ли такие гладкие функции f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости и дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы в каждой точке множества X?

Задача 36. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\, dx_1 \dots dx_n$ для положительно определенной квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$ матрица, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 37. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leqslant 1$ функции f равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\, dx = \int\limits_{|z|=1} f(z) \ln(z)\, dz\,,$$

где слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, а справа — по единичной окружности, обходимой один раз против часовой стрелки, начиная с точки $1 \in \mathbb{C}$, и логарифм действителен на положительной полуоси вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задача 38. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

Задача 39. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz/f(z)$ по всем комплексным корням многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$ равна нулю, если $\deg f \geqslant 2$. Верно ли это, когда $\deg f = 1$?

Задача 40. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 41. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в $\mathbb{R}^2$ и многочленов второй степени f_1, f_2, f_3, $f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ определитель 4×4 матрицы $\det(f_i(p_j)) = 0$.

Задача 42. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

Задача 43. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости[2].

Задача 44. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

[1] По мере Лебега.

[2] Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной

на полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

Задача 45. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

Information in English

Admission

Admission tests for the Master of Science programme «Mathematics» include a written exam in Mathematics and a qualifying English language test.

The results of English language test are accounted for as pass or fail only, and are not used for ranking those candidates who pass the test.

Mathematics exam lasts 300 minutes and consists of solving seven problems. The contribution of every problem to the final mark is specified in the formulation of problem. The complete solution of all seven problems worth in sum 100 points. The lowest passing grade for the exam in Mathematics is 21. The candidates passing the exam are ranged in decreasing order of the result.

Program of the Mathematics Exam

All candidates are supposed to be holding the following subjects:

- Basics of combinatorics (combinations, permutations, multinomial coefficients) and probability theory (independence, conditional probabilities).
- Limits of sequences and limits of functions, convergence of series.
- Groups, subgroups, cosets, homomorphisms of groups, quotient groups. The classification of finitely generated commutative groups. Basic examples of groups: symmetric and alternating groups, symmetry groups of figures, matrix groups, groups of residues.
- Rings, homomorphisms of rings, ideals, quotient rings. The Chinese Remainder Theorem. Euclidean rings, the unique factorization property. Invertible, prime and irreducible elements, prime and maximal ideals. Basic examples of rings: matrix rings, polynomials and formal power series, residues, the Gaussian integers.
- Fields, homomorphisms of fields, characteristics. Simple field extensions. The field of complex numbers. The description and examples of finite fields.

- Vector spaces and linear maps, bases, dimension. The solution of systems of linear equations. The characteristic and minimal polynomials of a matrix, the Cayley – Hamilton identity. The Jordan normal form of a complex matrix. The evaluation of analytic functions at a matrix.
- Bilinear and quadratic forms, the orthogonalization, the index of a real quadratic form. The euclidean geometry of the space $\mathbb{R}^n$: the triangle and Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz inequalities, distances between points and subspaces, angles between lines and hyperplanes, euclidean volumes of parallelepipeds and simplexes.
- Affine and projective spaces. Affine and projective maps. Plane curves of degree two (conics).
- Open, closed, and compact subsets of $\mathbb{R}^n$, dense and nowhere dense sets. Topological spaces, the compactness, connectivity, interior, and closure. Continuous maps, the uniform continuity, the uniform convergence. The Intermediate Value Theorem.
- Coverings, homotopies, triangulations, the fundamental group.
- The differential of a map $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, the Chain Rule. The Taylor series. Methods of finite-dimensional optimization, Lagrange's multipliers.
- The Lebesgue measure and integral in $\mathbb{R}^n$. The Fubini Theorem. Computations of arc lengths and surface areas by means of integrals.
- The complex derivative of function $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphic functions. The Cauchy integral, the Residue Theorem. The Schwarz Lemma.
- The Existence and Uniqueness Theorem for ordinary differential equations. Solution of ODEs with separable variables, linear ODEs of the first and second order, homogeneous ODEs. Partial differential equations of the first order, the method of characteristics.

Recommended textbooks in English

V. Arnold, *Ordinary differential equations,* Springer 2006.

M. Artin, *Algebra*, Addison Wesley 2010.

A. L. Gorodentsev, *Algebra I, II. Textbook for Students of Mathematics*, Springer 2016, 2017.

I. Kaplansky, *Linear algebra and geometry*, Dover Publications 2003.

J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall 2000.

W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill 1986

Practice problems for preparation to the math entrance exam

Problem 1. How many 9-digit numbers have an odd sum of digits?

Problem 2. Mr. Crookedarm, the famous basketball player, makes a series of 100 shots. When shooting the first ball, he makes it to the basket; when shooting the second, he misses. For all subsequent shots, the probability of a success is the number of previous successful shots divided by the number of all shots already made. What is the probability that he misses the basket exactly 50 times?

PROBLEM 3. Find the maximal possible number of intersection points between the diagonals of a convex n-gon on the plane.

PROBLEM 4. For the permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$, compute σ^{2018}.

PROBLEM 5. How many elements of the symmetric group S_n are represented as a product of two different transpositions?

PROBLEM 6. Can a group split in a union of two subgroups other than the identity and the whole group?

PROBLEM 7. How many automorphisms does the abelian group $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ have?

PROBLEM 8. Find the orders of matrix groups (A) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (B) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ over the field $\mathbb{F}_q$ of q elements.

PROBLEM 9. Does the field of eight elements contain a subfield of four elements?

PROBLEM 10. Find all invertible elements in the ring of Gaussian integers

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

PROBLEM 11. Consider the ideal (x) generated by the variable x in the ring (A) $\mathbb{C}[x]$ (B) $\mathbb{C}[[x]]$ (C) $\mathbb{Z}[[x]]$. Is it maximal?

PROBLEM 12. Is the element 2 (A) prime (B) irreducible in the commutative ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\ ?$$

PROBLEM 13. Is the polynomial (A) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ (B) $x^4 + 4$ irreducible over the field $\mathbb{Q}$?

PROBLEM 14. How many positive integer solutions has the equation $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

PROBLEM 15. Is the set of different embeddings of fields $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ finite?

PROBLEM 16. Is it possible to construct a regular 14-gon by means of a straighedge and a compass?

PROBLEM 17. Find a cubic polynomial with integer coefficients, whose roots are squares of the roots of polynomial $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

PROBLEM 18. Compute the product of all mutual differences between the complex n-th degree roots of unity.

PROBLEM 19. Does there exist a matrix, whose characteristic polynomial $\chi(t)$ and minimal polynomial $\mu(t)$ are:

(A) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$
(B) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$
(C) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$?

PROBLEM 20. Find the minimal polynomial of the square $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

PROBLEM 21. Prove that every open set in $\mathbb{R}^n$ is a union of countable family of closed sets.

PROBLEM 22. For two sets $A, B \subset \mathbb{R}$, is the closeness of $A \times B$ in $\mathbb{R}^2$ equivalent to the closeness of both sets in $\mathbb{R}$?

PROBLEM 23. For an arbitrary closed subset $C \subset \mathbb{R}^n$, does there exist a sequence $x : \mathbb{N} \to C$ such that every point of C is a partial limit of this sequence?

PROBLEM 24. Prove that every polynomial $f \in \mathbb{C}[z]$ produces the proper[1] map $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

PROBLEM 25. Does there exist a continuous surjection $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$ such that the full preimage $f^{-1}(x)$ of every $x \in [0,1]$ is bounded? Can such a function f be monotonous in the sense that the preimage of every connected set is connected?

PROBLEM 26. Evaluate $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ with two right decimal digits.

PROBLEM 27. For almost all $x \in \mathbb{R}$ with respect to the Lebesgue measure, prove that

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(nx) = 1\,.$$

PROBLEM 28. Is it possible to write every continuous differentiable function $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as a difference of two continuous strictly increasing functions?

PROBLEM 29. Does there exist an element of infinite order in the fundamental group of $\mathbb{R}^3 \smallsetminus X$, where X is a union of the z-axis, the point $(3,3,0)$, and the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ within the x,y-plane ?

PROBLEM 30. Find the fundamental group of the topological space obtained from $2D$-torus by identifying two different points on it.

PROBLEM 31. Prove that for any integrable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, there exist a number $t \in [0,1]$ such that $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

PROBLEM 32. For a given pair of complex $n \times n$ matrices A, B, evaluate the mixed partial derivative $\partial^2 f \,/\, \partial x \partial y$ of the matrix-valued function $f(x,y) = e^{xA+yB}$ at $x = y = 0$.

PROBLEM 33. Let a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be differentiable and have $f'(x) = 1$ almost everywhere with respect to the Lebesgue measure. Does this imply that $f(1) - f(0) = 1$? If not, give an explicit counterexample.

PROBLEM 34. Evaluate the following integral over the unit cube $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, in $\mathbb{R}^n$

$$\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n\,.$$

PROBLEM 35. Does there exist a triple of smooth functions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ such that the set $X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ is homeomorphic to the real projective plane and the

[1] I.e., such that the full preimage of every compact is compact.

differentials df_1, df_2, df_3 are linearly independent at every point of X?

PROBLEM 36. Evaluate the integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\,dx_1 \dots dx_n$ for a positive definite quadratic form $q(x) = xAx^t$, where $A = A^t$ is a real symmetric $n \times n$ matrix, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

PROBLEM 37. For a complex function f holomorphic in the unit disc $|z| \leqslant 1$, prove the equality

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \int_{|z|=1} f(z)\log(z)\,dz\,,$$

where, in the left hand side, the integration is performed over the straight segment $[0,1]$ of real axis, in the right hand side over the unit circle traversed once starting at 1 in the counterclockwise direction. The chosen branch of logarithm takes real values on the positive ray o the real line.

PROBLEM 38. All roots of a complex polynomial have positive imaginary part. Prove that all roots of its derivative also have positive imaginary part.

PROBLEM 39. For a polynomial $f \in \mathbb{C}[z]$ of degree $\deg f \geqslant 2$, prove that the sum of residues of the 1-form $dz/f(z)$ over all complex roots of f equals zero. Is this true, when $\deg f = 1$?

PROBLEM 40. Evaluate the integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\,dx$, where $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEM 41. For a quadruple of collinear points $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$ and quadratic polynomials $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x,y]$ show that 4×4 determinant $\det(f_i(p_j)) = 0$.

PROBLEM 42. Are there a circle and parabola having exactly two intersection points in the euclidean plane $\mathbb{R}^2$, one of which being a point of tangency, and the other a transveral intersection?

PROBLEM 43. Write a differential equation satisfied by all circles[1] in the plane.

PROBLEM 44. Write a system of second order differential equations on the polar coordinates in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi})\,, \end{cases}$$

whose solutions in the Cartesian coordinates (x,y) have the form $x = at + b$, $y = ct + d$, where a, b, c, d are arbitrary real constants.

PROBLEM 45. Compute the derivative of the solution of differential equation

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

subject to the initial condition $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ by the parameter θ for $\theta = 0$.

[1]Viewed locally, near points with non-vertical tangent lines, as graphs of one-variable functions.