

Вариант А

1. Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin \pi x)}{\operatorname{arctg}(2x)}$$

2. Найдите отрицательно определенную матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X^2 = \begin{pmatrix} 23 & 19 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$

4. Найдите общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 9e^{2x}$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

6. Найдите критические точки для функции

$$f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

и укажите их тип.

7. В задаче поиска экстремумов функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + z(x^2 - y^2)$$

при ограничении $x + y = 2$.

а) найдите все критические точки, удовлетворяющие необходимым условиям первого порядка,

б) для всех критических точек, найденных в пункте (а) выпишите какие-либо достаточные условия второго порядка и проведите классификацию критических точек.

8. При медицинском обследовании вероятность обнаружить заболевание «Т» у больного этим заболеванием равна 0,9. Вероятность принять здорового за больного равна 0,01. Доля больных с заболеванием «Т» по отношению ко всему населению равна 0,001.

Найдите вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным «Т» при обследовании.

9. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и имеют пуассоновское распределение с неизвестным параметром λ ($P(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$).

а) С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценки для λ и для $\exp(\lambda)$.

б) Предположим, что исследователь не знает, чему равны X_i . Ему известно лишь, равно ли каждое из X_i нулю или нет. С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценки для λ и для $\exp(\lambda)$. Всегда ли существуют предложенные оценки?

10. Исследуется зависимость спроса (Q) на некоторый товар от его цены (P). В предположении, что модель $\ln(Q) = \alpha + \beta \ln(P) + \varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой, функция спроса оценивается методом наименьших квадратов по 10 наблюдениям. Доверительный интервал для коэффициента эластичности (β), соответствующий уровню доверия 95%, принимает значение $(-2.4350, -1.8802)$.

а) Определите значения МНК-оценки и оценки дисперсии для коэффициента эластичности.

б) На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о равенстве эластичности -1 .

Вариант В

1. Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{\ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}$$

2. Найдите отрицательно определенную матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X^2 = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

4. Найдите общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y''' - 4y'' + 4y' = 16e^{3x}.$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3,5y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}.$$

6. Найдите критические точки для функции

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$$

и укажите их тип.

7. В задаче поиска экстремумов функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

при ограничении

$$x + y + z = 4$$

а) найдите все критические точки, удовлетворяющие необходимым условиям первого порядка,

б) для всех критических точек, найденных в пункте (а) выпишите какие-либо достаточные условия второго порядка и проведите классификацию критических точек.

8. При медицинском обследовании вероятность обнаружить заболевание «С» у больного этим заболеванием равна 0,8. Вероятность принять здорового за больного равна 0,01. Доля больных с заболеванием «Т» по отношению ко всему населению равна 0,0005.

Найдите вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным «Т» при обследовании.

9. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и одинаково распределены, причем $P(X_i = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0, \dots, m$. Параметр p неизвестен.

а) С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценки для p и для вероятности $P(X_i = 1)$.

б) Предположим, что исследователь не знает, чему равны X_i . Ему известно лишь, равно ли каждое из X_i нулю или нет. С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценки для p и для вероятности $P(X_i = 1)$. Всегда ли существуют предложенные оценки?

10. По ежегодным данным об объеме импорта товаров Y и личном располагаемом доходе X (обе величины измерены в миллиардах долларов) для США в период 1978 – 1997 годов исследователь оценивает методом наименьших квадратов модель $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ в предположении, что она удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой. Получено следующее уравнение выборочной регрессии:

$$Y = -261.09 + 0.24X$$

Оценка дисперсии случайной ошибки ε $\hat{\sigma}^2 = 475.48$, коэффициент детерминации $R^2 = 0.94$.

а) Вычислить оценку дисперсии коэффициента наклона.

б) На уровне значимости 5% проверить гипотезу о независимости импорта от личного располагаемого дохода.