Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2017 г.
Демонстрационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая решенная задача оценивается 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min. Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, the maximal sum is 100 points.

Среди следующих задач Вы можете выбрать 10 задач для решения. В зачет Вам пойдут не более десяти задач (если их будет решено больше, то десять лучших решений).

You can choose 10 problems to solve. If you solved more problems, ten best solutions will be considered for your final score.

1. Определите значения параметров $a \geq 0$ и $b \geq 0$ для которых следующий предел существует и равен 0:

1. Determine the values of real parameters $a \geq 0$ and $b \geq 0$ for which the following limit exists and equals 0:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^{1/x} + \cos(\pi + ax^5) - \ln\left(1 + \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}\right) \right).$$

2. Вычислите первообразную $F_n(x)$ решения $f_n(x)$ следующего функционального рекуррентного соотношения, удовлетворяющую условию $F_n(0) = 0$:

2. Compute the antiderivative $F_n(x)$ of the function $f_n(x)$ given by the following recurrence relations, taking $F_n(0) = 0$:

$$f_0(x) = 3x^2 - 1, \quad f_1(x) = 4x, \quad f_n(x) = 5f_{n-1}(x) - 6f_{n-2}(x).$$

3. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения

3. Find all real solutions of the differential equation

$$y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x} + 6x.$$

4. Сколькими способами можно составить бинарную последовательность длины n , не содержащую двух соседних нулей?

4. How many binary sequences of a length n can be built without neighboring zeros?

5. Даны $x_1, \dots, x_n$. Найдите состоятельную точечную оценку параметра θ для гипотезы о равномерном распределении данных в интервале $[0; \theta]$. Является ли она несмещенной?

5. For a given data $x_1, \dots, x_n$ find a consistent point estimation of the parameter θ for the hypothesis of a uniform data distribution in the range $[0; \theta]$. Is it unbiased?

6. Найдите математическое ожидание случайной величины, имеющей функцию плотности:

6. Find the mean value of random variable with the following density function:

$$\frac{1}{\pi} (\arctan(x))'$$

$$\frac{1}{\pi} (\arctan(x))'$$

7. Случайная величина ξ принимает только натуральные значения с вероятностями

7. The random variable ξ takes only non-negative integer values with probabilities

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

Найдите неизвестную константу c и математическое ожидание случайной величины ξ .

Find the unknown constant c and the mean value of the random variable ξ .

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2017 г.
Демонстрационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа «Финансовые технологии и анализ данных»

8. На плоскости задана декартова система с координатами x, y . При каких значениях вещественного параметра a окружность $x^2 + y^2 = 4$ имеет хотя бы одно пересечение с прямой $ax + y = a^2$?

9. Пусть V и W — двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Какие значения может принимать размерность подпространства $W \cap V$?

10. Для набора $C = (X(i), Y(i)) : 1 \leq i \leq N$ точек на плоскости приведите псевдокод алгоритма, вычисляющего выпуклую оболочку C .

11. При анализе заемщика вероятность выявить признаки неплатежеспособности при условии, что заемщик действительно является неплатежеспособным, равна 0,9. Вероятность принять платежеспособного заемщика за неплатежеспособного равна 0,01. Доля неплатежеспособных заемщиков по отношению ко всему клиентскому потоку равна 0,001. Найдите вероятность того, что заемщик в действительности платежеспособен несмотря на то, что был признан неплатежеспособным по результатам кредитного анализа.

12. Ниже представлен псевдо-код некоторой функции:

```
somefunction = function(K):
  X = 1
  Y = 2
  While (X < K)
    If (X is a prime number)
      Y = Y + 37
    Else
      If (X Mod 5 = 0)
        Y = Y + somefunction(X)
      End If
    End If
  X = X + 1
  End While
  Return Y;
```

Какое значение будет возвращено как результат выполнения команды: somefunction(10)?

8. A Cartesian system with coordinates x, y is given in the plane. For which values of the real parameter a does the circle $x^2 + y^2 = 4$ have at least one intersection with the line $ax + y = a^2$?

9. Let V and W be two-dimensional subspaces in $\mathbb{R}^4$. Find the possible values of the dimension of the subspace $V \cap W$.

10. For a collection $C = (X(i), Y(i)) : 1 \leq i \leq N$ of points in the plane give a pseudocode of an algorithm that calculates the convex hull of C .

11. Bad borrowers are detected with probability of 0.9 during credit analysis. Probability of considering good borrower bad is 0.01. Overall proportion of bad borrowers is 0.001. Suppose the credit analysis stated that the borrower is bad, what is the probability he or she is, nevertheless, a good borrower?

12. A function is defined by pseudo-code as follows:

What value will be returned after following command: somefunction(10)?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2017 г.
Демонстрационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа «Финансовые технологии и анализ данных»

13. По 19 наблюдениям оценены две регрессионные модели:

(1) $y = 10.2 + 6.2x - 0.7z$; $R^2 = 0.46$;

(2) $y = 7.8 + 5.4(x - z)$; $R^2 = 0.39$;

Общая сумма квадратов (TSS) составляет 202.2.

- Найдите сумму квадратов остатков для обеих регрессий.
- В уравнении (1) стандартные отклонения коэффициентов равны соответственно 3.1, 2.4, 2.3. Какие из коэффициентов значимо (на 5%-ом уровне) отличаются от нуля?
- Проверьте на 5%-ом уровне гипотезу, что в уравнении $y = \alpha + \beta x - \gamma z + \epsilon$ коэффициенты β и γ значимо отличаются ($H_0 : \beta = \gamma$)

14. Вы в команде с коллегой оцениваете одну и ту регрессионную модель: $Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t$ на независимых непересекающихся выборках. Предположим, что выполнены условия теоремы Гаусса-Маркова. Результаты регрессий приведены ниже:

Результаты

Ваша Выборка	Выборка коллеги
$n = 20$	$n = 20$
$\sum X_t = 100$	$\sum X_t = 200$
$\sum X_t^2 = 600$	$\sum X_t^2 = 2400$
$\sum Y_t = 500$	$\sum Y_t = 500$
$\hat{\beta}_I = 2$	$\hat{\beta}_{II} = 2.5$

Менеджер проекта решает объединить результаты работы и предлагает использовать единую оценку $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}\hat{\beta}_I + \frac{1}{2}\hat{\beta}_{II}$. Оптимальны ли весовые коэффициенты $(1/2, 1/2)$? Можно ли построить несмещенную оценку с меньшей дисперсией?

13. Having 19 observations you estimated two regression models:

(1) $y = 10.2 + 6.2x - 0.7z$; $R^2 = 0.46$;

(2) $y = 7.8 + 5.4(x - z)$; $R^2 = 0.39$;

Total sum of squares (TSS) is 202.2.

- Find error sum of squares (a.k.a. residual sum of squares) for both regressions.
- Standard errors of coefficients in equation (1) are as follows: 3.1, 2.4, 2.3. What coefficients are significant (5%-confidence level)?
- Check hypothesis that in $y = \alpha + \beta x - \gamma z + \epsilon$ coefficients β and γ are significantly different ($H_0 : \beta = \gamma$) at 5% confidence level

14. Together with your teammate you are estimating model: $Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t$ using independent disjoint data samples. Suppose, Gauss-Markov assumptions hold true. Results are provided below:

Results

Your Sample	Teammate sample
$n = 20$	$n = 20$
$\sum X_t = 100$	$\sum X_t = 200$
$\sum X_t^2 = 600$	$\sum X_t^2 = 2400$
$\sum Y_t = 500$	$\sum Y_t = 500$
$\hat{\beta}_I = 2$	$\hat{\beta}_{II} = 2.5$

Project manager decides to aggregate your work and suggests unified estimate $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}\hat{\beta}_I + \frac{1}{2}\hat{\beta}_{II}$. Do you think the weights $(1/2, 1/2)$ are optimal? Is there a way to build an estimate with lower variance?